

# Modellierung von Photonenströmen zur vergleichenden Autokorrelationsanalyse

Keßler, Franz Rudolf

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 50, 2000,  
S.21-95



J. Cramer Verlag, Braunschweig

## **Modellierung von Photonenströmen zur vergleichenden Autokorrelationsanalyse**

von **Franz Rudolf Keßler**, Düren\*

(Eingegangen 22.01.01)

### **Kurzfassung**

Nachdem Photonenströme bzw. einzelne Photonen mit hoher zeitlicher Auflösung durch Photonendetektoren quantitativ erfaßt werden können, haben Theorie und Praxis der Autokorrelationsanalyse der Strahlungssignale eine wachsende Bedeutung erhalten. Einerseits prägt sich hier das Fundamentalverständnis der „Quantenoptik“ aus, andererseits bieten sich damit spezielle Möglichkeiten einer spektral sehr hoch auflösenden „Korrelations-spektroskopie“. Überdies lassen sich aus einer experimentell erhaltenen Autokorrelationsfunktion (AKF) weitergehende Rückschlüsse auf die Qualität der Strahlungsquelle und/oder die Wechselwirkung der Photonen mit der durchstrahlten Materie ziehen.

Die Arbeit befaßt sich mit der Computer-gestützten Modellierung von Photonenströmen, wobei verschiedene theoretische Ansätze zur zeitlichen Abfolge der Photonen zu symptomatisch verschiedenen Zeitfunktionen führen, die entsprechend charakteristische statistische Schwankungen enthalten. Die anhand solcher „Modell-Photoströme“ ermittelten spezifischen Typen der AKF erlauben durch Vergleich mit experimentellen Resultaten deren weitergehende qualitative und u. U. auch quantitative Interpretation. – Innerhalb dieser Thematik ist auch das „Inversenproblem“ anzusprechen, d.h. die Frage nach der Möglichkeit eines eindeutigen Rückschlusses von der AKF auf eine bestimmte Zeitfunktion bzw. Statistik des vorliegenden Photonenstromes zu erörtern. Dabei ist u. a. auch zu berücksichtigen, daß die die Autokorrelation bestimmende Zeitfunktion der Photonenabfolge und die statistische Häufigkeitsverteilung der innerhalb der Samplingzeit des Detektors erfaßten Photonenanzahl unabhängig voneinander variieren können.

Nach referierenden Ausführungen zu Grundlage und Computer-gestützter Realisierung der Autokorrelationsanalyse (AKA) von Photonenströmen, sowie zur Photonenstatistik bzw. zum Photonenrauschen beim Emissionsprozess unterschiedlicher Lichtquellen bzw. nach dem Durchgang von Licht durch Materie, werden sodann im Sinne der Zielsetzung der vorliegenden Arbeit eine Reihe charakteristischer Photonenströme berechnet und der AKA unterworfen. Die Modelle erfassen dabei die zeitlich-statistische Abfolge bzw. die Häufigkeitsverteilung der Einzelphotonen, das sukzessive Auftreten von Photonen-„Pulks“ bestimmter „Form“ und die Existenz eines Photonen-„Gleichstroms“ mit überlagerten statistischen Schwankungen. Bei den erhaltenen Typen der AKF finden sich exponentiell oder Gauß-förmig relaxierende, oszillatorische und gedämpft oszillierende Anteile in spezifischer Überlagerung, deren Auftreten im Einzelfall begründend diskutiert wird.

---

\*) Univ.Prof. em. Dr. Franz Rudolf Keßler · Inst. für Halbleiterphysik und Optik der Techn. Universität Carolo Wilhelmina zu Braunschweig  
Privatanschrift: Am Krausberg 12 · D-52351 Düren · e-mail: FranzRudolf.Kessler@t-online

## Gliederung

### Kurzfassung

#### I Einleitung

#### II Autokorrelation der Photonenströme

- A] Grundlagen der Autokorrelationsspektroskopie
  - 1.) Autokorrelation
  - 2.) Autokorrelationsspektroskopie
- B] Computer-Autokorrelator
  - 1.) Realisierung und Meßwert-Zugang
  - 2.) Prüfung der Funktion
- C] Signalrauschen
  - 1.) „Weißes“ Rauschen
  - 2.) gefiltertes Rauschen
    - a) Tiefpaß-Filterung
    - b) Resonanz-Filterung
  - 3.) überlagertes Rauschen

#### III Photonenstatistik

- A] Linienstrahler
  - 1.) Lorentz- und Gauß-Spektrallinie
  - 2.) Laser-Strahlung
  - 3.) Laser-Streustrahlung
- B] Breitbandstrahler: Temperaturstrahler
  - 1.) „Schwarzer Körper“
  - 2.) Gefilterte Temperaturstrahlung
- C] Gaußsches Strahlungsfeld

#### IV Autokorrelationsanalyse modellierter Photonenströme

- A] Photonen-„Pulks“
  - 1.) Exponential-Zeitform
  - 2.) Gauß-Zeitform
  - 3.) Zeitform gemäß Häufigkeitsverteilung
- B] Photonen-„Gleichstrom“ mit symmetrischen Schwankungen
  - 1.) Exponential-Zeitform
  - 2.) Gauß-Zeitform
  - 3.) Rauschen

#### V Zusammenfassung

- A] Ergebnisse
- B] Ausblick

#### VI Literatur

- A] Artikel
- B] Bücher

#### VII Anhang:

- AH1 Programmauszug zu Abschnitt IV / A 2
- AH2 Näherung des Gaußschen Fehlerintegrals

## I Einleitung

Als spektroskopisches Verfahren mit extrem hohem Auflösungsvermögen hat sich die Autokorrelationsanalyse des detektierten Photonenstromes seit einigen Jahren etabliert, nachdem einerseits der LASER als Lichtquelle hoher Kohärenz und zugleich hoher Intensität zur Verfügung steht und andererseits hinreichend schnelle, sowie empfindliche optische Detektoren für die Registrierung von einzelnen Photonen realisiert sind. Dieses meßtechnische Instrument begünstigend, kommt der Fortschritt auf dem Gebiet der Computer-gestützten Speicherung und Verarbeitung großer Datenmengen in hinreichend kurzer Zeit hinzu.

Die physikalische Interpretation einer mit diesem spezifisch leistungsfähigen Instrumentarium ermittelten Autokorrelationsfunktion (AKF) führt einerseits zu einer vertieften Kenntnis der mikrophysikalischen Vorgänge bei der Photonenemission und andererseits zu einer erweiterten Einsicht bzw. Analyse der Beeinflussung von Photonenströmen bei der Lichtausbreitung in Materie. Dabei stehen die Aspekte der sogen. „Quantenoptik“ naturgemäß in fester Beziehung zum „klassischen“ Wellenbild der elektromagnetischen Lichtstrahlung. Auf diese Weise stellt die sogen. Autokorrelationsspektroskopie eine modernes experimental-physikalisches Verfahren dar, Aussagen zu gewinnen einerseits über die Qualität von Lichtquellen und andererseits über Materialeigenschaften, die sich durch eine Beeinflussung des durchstrahlenden Lichtes auszeichnen.<sup>1)</sup>

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Thematik der Computer-gestützten Modellierung von Photonenströmen, so daß auf der Grundlage vorgegebener theoretisch-physikalischer Ansätze simulierte „Meßdaten“ gewonnen werden, wie sie Photonendetektoren in einer zeitlichen Abfolge nach Maßgabe ihrer Samplingzeit liefern würden. Diese „Meßdaten“ werden sodann einer numerischen Autokorrelationsanalyse unterworfen. Die erhaltenen Autokorrelationsfunktionen sollen durch Vergleich mit entsprechenden Ergebnissen aus Experimenten eine „vergleichende Interpretation“ der letzteren ermöglichen bzw. zu der Diskussion beitragen, ob und in welchem Maße eine qualitative und eventuell, z. B. durch optimierte Parameteranpassung, auch quantitative Analyse möglich ist, so daß Rückschlüsse bezüglich der Qualität einer detektierten Strahlung, deren Ursprung und/oder deren Modifikation bei der Passage von Materie gewonnen werden können. Schließlich sind u. U. in entsprechender Weise auch Aussagen über systematische und/oder statistische Ungenauigkeiten bei der Autokorrelationsspektroskopie zu gewinnen.

In allen Fällen ist dabei der „Intensität“ des Lichtes, d.h. der Größe des zu registrierenden Photonenstromes, in Relation zur Signalverarbeitungspotenz des Detektors Aufmerksamkeit zu schenken. Drei Größenbereiche des Photonenstromes sind dabei primär zu unterscheiden:

- 1.) Sehr geringe Intensitäten: Einzelphotonen mit zwischengeschalteten „Wartezeiten“ werden registriert, wobei die Statistik der Wartezeiten für Temperatur- und Laser-Strahlung charakteristisch verschieden ist,

---

<sup>1</sup> Im Literaturverzeichnis sind Artikel unter [A1] und [A2] sowie Monographien unter [1] bis [6] aufgeführt, in denen diese Thematik in erweitertem Umfang abgehandelt wird.

- 2.) mittlere Intensitäten: Photonen-“Pulks“ treten auf, die in sich alle eine charakteristische, jedoch statistisch modifizierte Zeitfunktion besitzen und u.U. durch signifikante Pausen getrennt sind, und
- 3.) höhere Intensitäten: ein Photonen-“Gleichstrom“ trifft ein, der vom Detektor zeitlich nicht mehr weiter auflösbar ist, dem jedoch charakteristische Schwankungen, die ihrerseits mit dem Autokorrelator analysiert werden können, in einer charakteristisch und/oder statistisch variierenden Abfolge überlagert sind.

In allen Fällen ist auch die je spezifische Häufigkeitsverteilung der Größe der Meßwerte zu beachten, die z.B. innerhalb eines Größenintervalls gleichmäßig, exponentiell oder Gaußförmig verteilt sein können.

Die in Kapitel IV vorgestellten Modell-Photoströme lassen die genannten individuellen Unterschiede deutlicher werden.

In meßtechnischer Hinsicht wird die Autokorrelationsanalyse (AKA) meistens zur Form- bzw. Halbwertsbreitenanalyse von Spektrallinien eingesetzt, sei es bei emittierter, sei es bei transmittierter Strahlung. Dabei wird ein extrem hohes spektrales Auflösungsvermögen von etwa  $(\lambda/\Delta\lambda) = 10^{12}$  erreicht, das um mehrere Größenordnungen oberhalb dessen von Interferenz-Spektrographen liegt. Andererseits ist jedoch – aus technisch-apparativen Gründen – das Auflösungsvermögen nach unten – noch – auf etwa  $10^9$  begrenzt.

Mit Hilfe einer AKA lassen sich aber u. U. auch andere Aussagen gewinnen. Unter Bezug auf die obige Dreiergruppierung der Photonenströme seien als Beispiele genannt: Zu

- 1.) Charakterisierung der primären Strahlungsquelle in Bezug auf Spektralverteilung und Kohärenz,
- 2.) Unterscheidung zwischen Auftreten von Exponential-Pulks, wie sie bei der Abstrahlung von gedämpften „Oszillatoren“ erwartet werden, und der Existenz von Gauß-Pulks, wie sie bei Puls-LASERN mit Modenkopplung erzeugt werden, und
- 3.) Unterscheidung zwischen einem Gaußschen Strahlungsfeld mit Gaußförmiger Häufigkeitsverteilung der elektrischen Feldstärken, wie es z. B. beim Durchgang von LASER-Strahlung durch ein fluides Medium mit statistischen Dichteschwankungen infolge von Streuung auftritt, und einem Strahlungsfeld mit einer anderen Häufigkeitsverteilung.

Da die AKA ein „integrales“ und überdies nichtlineares mathematisches Werkzeug darstellt, tritt auch hier das sogen. „Inversenproblem“ auf. Das ist die Frage nach der Eindeutigkeit des Rückschlusses auf das theoretische Modell bzw. die quantitative Form der Zeitfunktion des Photonenstromes, wenn die gewonnene Autokorrelationsfunktion in „Umkehrung“ ausgewertet werden soll. – Auch in dieser Beziehung kann die „Modellierung von Photonenströmen“ zu hilfreichen Einsichten führen.

Nach referierenden Ausführungen in Kapitel II zu Prinzip und Computer-gestützter Realisierung der Autokorrelationsanalyse der Photonenströme sowie zum Signalrauschen folgen in Kapitel III Ausführungen über die unterschiedliche Photonenstatistik bzw. zum unterschiedlichen Photonenrauschen bei „Linienstrahlern“ und „Breitbandstrahlern“. Typische Vertreter dieser beiden Gruppen sind einerseits die Laserstrahlung und andererseits die Temperaturstrahlung. Dabei werden auch die signifikant verschiedenen „Wartezeiten“

zwischen der Einzel-Photonen-Detektion diskutiert, wenn denn der Photonenstrom aus nur hinreichend wenigen Photonen pro Sekunde besteht. – Ein weiterer Abschnitt in Kapitel III weist auf die Besonderheit des „Gaußschen Strahlungsfeldes“ hin.

Sodann, und das ist der wesentliche Aspekt der vorliegenden Arbeit, werden in Kap. IV eine Reihe charakteristischer Photonenströme, bzw. die daraus gewonnene zeitliche Abfolge der „Meßwerte“ eines hypothetischen Detektors, berechnet und der Autokorrelationsanalyse unterworfen. Der „Meßwert“ ist dabei der in der (relativ kleinen ! ) „Sampling-Zeit“ des Detektors erfaßten Photonenanzahl, die wiederum ein Maß ist für die momentane Größe der zeitabhängigen Photonenstromstärke, proportional. Die Modelle erfassen dabei das sukzessive Auftreten von Photonen-„Pulks“ unterschiedlicher Zeitform und/oder Häufigkeitsverteilung der Meßwerte oder basieren auf der Existenz eines Photonen-„Gleichstroms“, bei dem die einzelnen Photonen infolge ihres kleinen Zeitabstandes bei der vergleichsweise zu großen Zeitkonstanten des Detektorsystems nicht mehr zeitaufgelöst erfaßt werden können. Diesem Photonen-„Gleichstrom“ sind jedoch charakteristische und/oder statistische Schwankungen überlagert, die dann das signifikante Autokorrelationsverhalten bestimmen. – Da bei der Charakterisierung der einzelnen Modelle die Häufigkeitsverteilung der „Meßwerte“ eine wesentliche Rolle spielt, wird diese nicht nur mittels Wahrscheinlichkeitstransformation analytisch spezifisch implimentiert, sondern durch Erstellung eines gewissermaßen „empirischen“ Histogramms über die berechneten (i. allg. viele Tausend) Meßwerte überprüft. Histogramme dieser Art, die einer über einen entsprechend längeren Zeitraum laufenden AKA entsprechen, werden gegebenenfalls graphisch dargestellt und der erhaltenen AKF zur Unterstützung der Anschaulichkeit beigelegt.

In der abschließenden Zusammenfassung in Kapitel V werden die aus den Modellrechnungen gewonnenen Einsichten aufgeführt. Ferner weist ein „Ausblick“ darauf hin, daß der vorliegende Einstieg in die Modellierung von Photonenströmen erweitert fortgeführt und durch eine vermehrte Anzahl experimenteller Resultate ergänzt werden sollte.

Ein Literaturverzeichnis und ein Anhang vervollständigen die Arbeit. Letzterer enthält den konkreten Programmausschnitt eines Photonenstrommodells, um es dem Leser zu ermöglichen, das angewandte Kalkül genau verfolgen und gegebenenfalls in eigenen Programmen nachbilden (oder abändern) zu können. – Ferner enthält der Anhang Ausführungen zur Begründung einer (wenig aufwendigen) Näherung zur Berechnung des Gauß'schen Fehlerintegrals, wie sie in der vorliegenden Arbeit verwendet wird.

Die Rechnungen wurden ohne spezielle Software durchgeführt, vielmehr selbst in HT-Basic programmiert. Den Rechnungsablauf besorgte ein Intel-Pentium-Prozessor.

## **II Autokorrelation der Photonenströme**

### **A ] Grundlagen der Korrelationsspektroskopie**

#### **1.) Autokorrelation**

Das mathematische Kalkül der Berechnung der Autokorrelationsfunktion eines zeitabhängigen Signals steht in enger Beziehung zu der Fouriertransformation zwischen

Zeitabhängigkeit und Spektralverteilung dieser Signalfunktion. Im Vordergrund des Interesses stehen dabei hier nicht-periodische Funktionen. Deshalb empfiehlt es sich, die diesbezüglichen Formalismen der Fouriertransformation im Gedächtnis zu haben. Wichtige Zusammenhänge sind dabei:

Die zu einer nicht-periodischen komplexen Zeitfunktion  $\underline{E}(t)$ , die für  $t \rightarrow \pm \infty$  gegen Null geht, gehört die komplexe spektrale Amplitudendichte  $\underline{A}(\omega)$ , die durch die Fouriertransformation in der Form des Fourierintegrals gewonnen wird, wobei die komplexe Form den Betrag und den Phasenwinkel in ihrer jeweiligen Frequenzabhängigkeit zum Ausdruck bringt. – Unter  $\underline{E}(t)$  wird in der vorliegenden Arbeit die Zeitfunktion der elektrischen Feldstärke einer elektromagnetischen Welle verstanden.

Die reelle **spektrale Energiedichte**  $F(\omega)$  der Zeitfunktion  $\underline{E}(t)$  ergibt sich aus dem „Parsevalschen Theorem“ zu

$$F(\omega) = C * |\underline{A}(\omega)|^2 \quad (\text{Gl. II / A 1 / 1}),$$

wobei die Konstante  $C$  mit ihrer entsprechenden Dimension den physikalischen Zusammenhang zwischen der spektralen Amplitudendichte und der Energie der Signalfunktion berücksichtigt.

Für eine *stationäre* nicht-periodische Zeitfunktion erstreckt man das Fourier-Integral nur über einen Zeitraum  $\Delta t$  und die diesbezügliche Funktion der komplexen spektralen Amplitudendichte ist entsprechend als  $\underline{A}(\omega, \Delta t)$  zu indizieren. Da in diesem Fall die Werte der Funktion  $\underline{A}(\omega, \Delta t)$  mit  $\Delta t$  anwachsen, wird anstelle der spektralen Energiedichte  $F(\omega)$  die Größe der von  $\Delta t$  unabhängigen „**spektralen Leistungsdichte**“  $W(\omega)$  (engl. = power spectral density) benutzt, deren Definition lautet:

$$W(\omega) = \{ C * |\underline{A}(\omega, \Delta t)|^2 / \Delta t \}_{\lim \Delta t \rightarrow \infty} \quad (\text{Gl. II / A 1 / 2})$$

Betrachtet man elektromagnetische Wellen und die durch sie transportierte Energie pro Querschnittfläche und Zeit, so ist zu berücksichtigen, daß bei der Detektion der optischen Strahlung die schnelle Sinus-förmige Oszillation des Poynting-Vektors zeitlich nicht aufgelöst werden kann. Die hier diskutierte Funktion  $E(t)$  entspricht also „nur“ der zeitlichen Variation des Effektivwertes der elektrischen Feldstärke  $E_{\text{eff}}(t) = E_0(t) / \sqrt{2}$  ( $E_0$  = Scheitelwert). Und statt der spektralen Leistungsdichte diskutiert man die << spektrale Strahlungsflußdichte >>  $D(\omega) = (\partial \phi / \partial \omega)$  mit der Dimension  $\dim [D] = [\text{Energie} / (\text{Fläche} * \text{Zeit} * \text{Hz})]$ . Zwischen der zeitabhängigen Strahlungsflußdichte  $\phi(t)$  mit der Dimension  $\dim [\phi] = [\text{Energie} / (\text{Fläche} * \text{Zeit})]$  und dem Scheitelwert  $E_0(t)$  bzw.  $E(t) = E_{\text{eff}}(t)$  gilt andererseits der Zusammenhang:

$$\phi(t) = (1/2) * \text{Re} (1/\underline{Z}) * [E_0(t)]^2 = \text{Re} (1/\underline{Z}) * [|E(t)|]^2 \quad (\text{Gl. II / A 1 / 3})$$

mit  $\underline{Z}$  = komplexer Wellenwiderstand des Ausbreitungsmediums.

$\phi(t)$  wird gewonnen als zeitliches Mittel des Poynting-Vektors, der selbst, von der Richtungsangabe abgesehen, die momentane, oszillierende Energie-Flußdichte darstellt.

In diesem Fall leitet sich also die Konstante  $C$  in Gl. II / A 1 / 1 u. 2 aus Gl. II / A 1 / 3 ab. Die Flächendichte des zugehörigen Photonenstromes  $J$  mit der Dimension  $\dim [J] = [1/(\text{Fläche} * \text{Zeit})]$ , bestehend aus den Photonen der variierenden Energie ( $h\nu$ ), ergibt sich bei gegebener Funktion der spektralen Strahlungsflußdichte  $D(\omega)$  zu

$$J = \int_0^{\infty} [D(\omega) / (h\nu)] d\omega \quad (\text{Gl. II / A 1 / 4})$$

In der meßtechnischen Praxis der Computer-gestützten Autokorrelationsspektroskopie liegen jedoch keine Zeit-kontinuierlichen Funktionen vor, sondern diskrete Meßwerte. Dies erfordert eine numerische Modifikation der Fouriertransformation:

Liegen statt einer kontinuierlichen Zeitfunktion  $E(t)$  nur  $N$  Stück zeitdiskreter komplexer „Meßwerte“  $\underline{Y}_k$  vor mit  $0 \leq k \leq (N-1)$ , die in den gleichen Zeitabständen der sogen. Sampling-Zeit  $\delta t$  sukzessiv gewonnen wurden, so verwendet man die „**diskrete Fourier-Transformation**“ an in der Form (s. z.B. [7]):

$$\underline{A}(v_n) = \delta t * \sum_{k=0}^{(N-1)} \underline{Y}_k * \exp[+i 2 \pi k n / (\delta t * N)] \quad (\text{Gl. II / A 1 / 5})$$

mit  $0 \leq n \leq (N-1)$  und den Frequenzen  $v_n = n / (\delta t * N)$ .

Die Inversionsbeziehung, die die Meßwerte exakt reproduziert, lautet:

$$\underline{Y}_k = (1/\delta t) * (1/N) * \sum_{n=0}^{(N-1)} \underline{A}(v_n) * \exp[-i 2 \pi k n / (\delta t * N)] \quad (\text{Gl. II / A 1 / 6})$$

mit  $0 \leq k \leq (N-1)$ .

Man erhält also aus  $N$  diskreten komplexen „Meßwerten“  $\underline{Y}_k$  genau  $N$  diskrete komplexe Werte für die spektrale Amplitudendichte  $\underline{A}(v_n)$  und umgekehrt. Die Symmetrieeigenschaften sind dabei die gleichen wie die für die kontinuierliche Fourier-Transformation.

Die spektrale Energie-Dichte bzw. die spektrale Leistungsdichte ist dann gegeben durch die Beziehung:

$$F(v_n) = W(v_n) * \delta t * (N-1) = C * |\underline{A}(v_n)|^2 \quad (\text{Gl. II / A 1 / 7})$$

Bei der diskreten Fouriertransformation ist speziell zu beachten:

- Es können keine spektralen Amplitudendichten gewonnen werden für Frequenzen gleich oder größer als die „kritische Frequenz“  $v_{\text{krit}} = 1 / (2 * \delta t)$ , eine Aussage, die dem „Abtast-Theorem“ entspricht. Diese obere Frequenzgrenze wird auch als „Nyquist-Frequenz“ bezeichnet.
- Die Werte der spektralen Amplitudendichten *unterhalb* von  $v_{\text{krit}} = 1 / (2 * \delta t)$  sind verfälscht, wenn in der zu transformierenden Zeitfunktion spektrale Frequenzkomponenten *oberhalb* von  $v_{\text{krit}}$  enthalten sind, denn diese werden spiegelbildlich zu  $v_{\text{krit}}$  bei tieferen Frequenzen additiv überlagert. Dieser Effekt wird als „Verfremdung“ (engl. = aliasing) bezeichnet.



In der vorliegenden Arbeit wird bei den numerischen Rechnungen mit den diskreten „Meßwerten“ im Sinne dieser „diskreten Fouriertransformation“ verfahren, wobei der „schnelle“ Algorithmus nach Danielson-Lanczos ( s. [7] ) verwendet wird.

Hat man zwei Zeitfunktionen  $\underline{E}(t)$  und  $\underline{G}(t)$ , beide ohne Gleichanteile, d.h. es ist  $[\underline{E}(t)]_{\text{zeitl. Mittel}} = 0$  und  $[\underline{G}(t)]_{\text{zeitl. Mittel}} = 0$ , so bezeichnet man die Größe

$$K = [\underline{E}(t) * \underline{G}(t)]_{\text{zeitl. Mittel}} = \lim_{T \rightarrow \infty} [1/(2T)] \int_{-T}^{+T} \underline{E}(t) * \underline{G}(t) * dt \quad (\text{Gl. II / A 1 / 8})$$

als „**Korrelationsfaktor**“. Sind die Gleichanteile in  $\underline{E}(t)$  und  $\underline{G}(t)$  nicht Null, so rechnet man jeweils nur mit den Abweichungen vom Mittelwert, d.h. mit  $(\underline{E}(t) - \langle \underline{E}(t) \rangle)$  und  $(\underline{G}(t) - \langle \underline{G}(t) \rangle)$ .

Bezieht man den Korrelationsfaktor auf sein mögliches Maximum, das ist die Wurzel aus dem Produkt der Quadrate der Effektivwerte beider Funktionen, so ist diese Größe als „**Korrelationskoeffizient**“ definiert, dessen Werte stets zwischen -1 und +1 liegen. – Der **Effektivwert** von z. B.  $\underline{E}(t)$  ist gegeben zu

$$\text{Effektivwert von } \underline{E}(t) : [\underline{E}(t)]_{\text{eff.}} = \sqrt{[\underline{E}(t)]_{\text{zeitl. Mittel}}^2} \quad (\text{Gl. II / A 1 / 9}).$$

Ist die Zeitfunktion  $\underline{E}(t)$  selbst das Produkt zweier Zeitfunktionen, so kann u.U. zur Erleichterung der mathematischen Behandlung der „**Faltungssatz**“ (siehe z.B. [ 8 ] ) angewandt werden.

Als „**Autokorrelationsfunktion 1. Ordnung von E(t)**“, hier geschrieben als „**AKF<sub>E</sub><sup>(1)</sup>(τ)**“, bezeichnet man

$$\text{AKF}_E^{(1)}(\tau) = [\underline{E}(t) * \underline{E}(t + \tau)]_{\text{zeitl. Mittel}} = \lim_{T \rightarrow \infty} [1/(2T)] \int_{-T}^{+T} \underline{E}(t) * \underline{E}(t + \tau) * dt \quad (\text{Gl. II / A 1 / 10})$$

wobei die „Verzögerungszeit“  $\tau \geq 0$  ist.

Spezielle Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion, auch hier gilt dazu die Voraussetzung  $\langle \underline{E}(t) \rangle = 0$ , sind:

- Für  $\tau = 0$  ist die  $\text{AKF}_E^{(1)}$  maximal.
- $\text{AKF}_E^{(1)}(\tau = 0)$  ist gleich dem Quadrat des Effektivwertes von  $\underline{E}(t)$ . Dies gilt jedoch nur, wenn in  $\underline{E}(t)$  kein unkorrelierter Rauschanteil enthalten ist.
- Die  $\text{AKF}_E^{(1)}(\tau)$  ist eine in  $\tau$  symmetrische Funktion, d.h. es ist

$$\text{AKF}_E^{(1)}(+\tau) = \text{AKF}_E^{(1)}(-\tau) \quad (\text{Gl. II / A 1 / 11})$$

- Die  $\text{AKF}_E^{(1)}$  einer periodischen Funktion ist wieder eine periodische Funktion gleicher Periodenlänge, wobei jedoch die Phaseninformation verloren geht. Für  $\underline{E}(t) = A_o * \sin(\omega t + \varphi)$  gilt z.B.

$$\text{AKF}_E^{(1)}(\tau) = (1/2) * (A_o)^2 * \cos(\omega * \tau) \quad (\text{Gl. II / A 1 / 12})$$

## II A ] 2.) Autokorrelationsspektroskopie

Die **Autokorrelationsspektroskopie** stützt sich auf zwei Theoreme, die erst nach 1940 bzw. in den sechziger Jahren erarbeitet worden sind. Da ist zunächst das **Wiener-Khintchin** \*) **-Theorem** [ 3 ] zu nennen, auch bekannt als „Wienerscher Satz“.

Dieses Theorem sagt aus, daß die Fouriertransformierte der << Autokorrelationsfunktion 1. Ordnung der Zeitfunktion E(t) >> gleich ist der << spektralen Dichte des Leistungsspektrums W(ω) >> der beteiligten Sinusfunktionen und umgekehrt. Es ist also

$$W(\omega) = \text{const} * \int_0^{\infty} AKF^{(1)}_E(\tau) * \cos(\omega\tau) * d\tau \quad (\text{Gl. II / A 2 / 1})$$

Und für die Umkehrung gilt :

$$AKF^{(1)}_E(\tau) = \text{const} * \int_0^{\infty} W(\omega) * \cos(\omega\tau) * d\omega \quad (\text{Gl. II / A 2 / 2})$$

Man kann also vergleichend sagen: So wie die inverse Fouriertransformation (FT) aus der reellen spektralen Amplitudendichte  $A(\omega) = | \underline{A}(\omega) |$  die gerade (also nur Cosinuskomponenten enthaltende) Zeitfunktion E(t) liefert, so liefert sie aus der spektralen Leistungsdichte W(ω) die Verzögerungs-Zeitfunktion der Autokorrelation (1) von E(t), also  $AKF^{(1)}_E(\tau)$ .

Die unmittelbare Nutzung des Wiener-Khinchin-Theorems zur Spektralanalyse in der Optik, d.h. zur Gewinnung der Spektralfunktion W(ω), entfällt jedoch, da es wegen der hohen optischen Frequenzen nicht, oder sollte man sagen „noch nicht“, möglich ist, die Zeitfunktion der elektrischen Feldstärke E(t) mit hinreichender zeitlicher Auflösung direkt zu detektieren, um Gl. II / A 1 / 10 mit Gl. II / A 2 / 1 anwenden zu können.

Die Lösung des Problems ergibt sich aus dem zweiten Theorem, der sogen. **Siebert-Relation** [A2], [A3] , die auch mit dem Namen Mandel verknüpft ist [4] [ A4 ] . Man verwendet dabei die << Autokorrelationsfunktion 2. Ordnung >>  $AKF^{(2)}_E(\tau)$  der Zeitfunktion der elektrischen Feldstärke E(t) in der Definition:

$$AKF^{(2)}_E(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T [ | E(t) | ]^2 * [ | E(t + \tau) | ]^2 * dt \quad (\text{Gl. II / A 2 / 3}).$$

Wegen des Bezugs auf das Betragsquadrat der elektrischen Feldstärke E(t) ( s. oben Abschnitt II / A 1 ) besteht ein Bezug zur Strahlungsflußdichte φ bzw. zum detektierten Strahlungsfluß S und damit zur << Autokorrelationsfunktion 1. Ordnung der Zeitfunktion des Strahlungsflusses „S“ >> hier geschrieben als „ $AKF^{(1)}_S$ “. Diese Beziehung lautet:

$$AKF^{(1)}_S = \text{const} * AKF^{(2)}_E(\tau) \quad (\text{Gl. II / A 2 / 4})$$

---

\*) Man findet den Namen Khintchin gelegentlich auch in der Schreibweise „Khinchin“

Die Funktion  $AKF_s^{(1)}$  ist, bis auf einen apparativ bedingten Proportionalitätsfaktor, ihrerseits der Messung zugänglich, wenn man die diskrete Meßwert-Abfolge der in der Sampling-Zeit  $\delta t$  registrierten Photonenzahl als  $S(t)$  einem Autokorrelator zuführt. Voraussetzung ist dabei natürlich, daß der Photonenzähler bzw. Photonendetektor, der einen dem empfangenen Strahlungsfluß proportionalen Signalwert produziert, die zeitlichen Änderungen des Strahlungsflusses hinreichend schnell erfassen kann. Mit den heutigen Halbleiter-Photodetektoren wird gegenwärtig eine Zeitauflösung bis herab zu etwa 1 Nanosekunde erreicht.

Da die Meßwerte stets nur Null oder positiv sind, verschwindet der zeitliche Mittelwert  $\langle S(t) \rangle$  nicht. Das hat zur Folge, daß die Autokorrelationsfunktion mit wachsender Verzögerungszeit  $\tau$  nicht auf Null abklingt, sondern auf einen konstanten Wert relaxiert, der dem Quadrat des Mittelwertes, also  $\langle S(t) \rangle^2$  entspricht.

Die **Siebert-Relation** liefert nun den benötigten Zusammenhang zwischen den Autokorrelationsfunktionen 1. und 2. Ordnung der Zeitfunktion der elektrischen Feldstärke  $E(t)$ :

$$AKF_E^{(2)}(\tau) = \text{const} + [ | AKF_E^{(1)}(\tau) | ]^2 \quad (\text{Gl. II / A 2 / 5})$$

Durch Messung von  $AKF_s^{(1)}$  erhält man also (vergl. Gl. II / A 2 / 4) bis auf eine bei  $AKF_s^{(1)}$  zu berücksichtigende additive Konstante den Betrag der  $AKF_E^{(1)}(\tau)$ . Entweder ist diese Funktion als solche gesucht oder man verschafft sich die spektrale Dichte der Strahlungsflußdichte  $W(\omega)$  mit Gl. II / A 2 / 1 durch entsprechende Fourier-Transformation bzw. in einem weiteren Schritt die spektrale Amplitudendichtefunktion  $A(\omega)$  mit Gl. II / A 1 / 2.

Es sei noch bemerkt, daß in Strenge die Gültigkeit der Siebert-Relation an die Voraussetzung geknüpft ist, daß die Verteilungsfunktion der Häufigkeit der Amplitudengröße  $E(t)$  in ihrer Abweichung vom mittleren Wert in Bezug auf das zeitliche Auftreten eine Gauß-förmige ist. – Im Kapitel III wird auf diese Voraussetzung im Rahmen der Photonenstatistik noch näher eingegangen.

## II B ] Computer - Autokorrelator

### 1. Realisierung und Meßwertzugang

Der formalen Definition nach (vergl. oben) funktioniert ein numerischer, durch einen Computer realisierter Autokorrelator wie folgt: Ein Laufparameter variiert von  $M = 1$  bis  $M = (M_2 + 1)$ . Es wird jeder „relevante“ (die Bedeutung dieses Ausdruckes wird weiter unten deutlich) Meßwert  $Y_i$ , gewonnen zur Zeit  $t_i$ , mit dem Meßwert  $Y_{(i+M-1)}$ , gewonnen zur Zeit  $t_{(i+M-1)}$ , multipliziert, der also um die Zeitdifferenz  $(M - 1) \cdot \delta t$  später ermittelt wurde. Am Anfang dieser Serie der Produktbildung entsteht dabei das Produkt  $(Y_i \cdot Y_i)$  und das letzte Produkt ist  $(Y_i \cdot Y_{(i+M_2)})$ . Alle Produkte werden jeweils im „Darstellungsregister“ [„D-Register“] bei  $D(M)$  additiv abgelegt. Im D-Register steht, wenn alle relevanten Meßwerte als  $Y_i$ -Wert an der Reihe gewesen sind, schließlich an jedem Platz  $D(M)$  die Summe aller Produkte mit gleicher Zeitdifferenz  $(M - 1) \cdot \delta t$ . – Nach der normierenden Division aller  $D(M)$ -Werte durch die Gesamtsumationszeit  $T$  steht im D-Register die Autokorrelationsfunktion in der Form einer Wertetabelle, d.h. in

einer Abfolge von Funktionswerten, die mit  $\Delta\tau = \delta t$  gleichabständig sind in Bezug auf die zugeordnete Verzögerungszeit  $\tau$ .

Da bei den letzten  $M2$  Stück der insgesamt registrierten  $N4$  Stück Meßwerte zu keinem dieser Meßwerte ein Meßwert, gewonnen *nach* ihm im zeitlichen Abstand der maximalen Verzögerungszeit  $M2 * \delta t$ , existiert, kann mit ihm die vollständige Serie der Produktbildung nicht ausgeführt werden. Diese Meßwerte müssen deshalb als nicht „relevant“ ausscheiden, was die Rolle als  $Y_i$  - Wert angeht. Der Index  $i$  der „relevanten“ Meßwerte läuft also von  $i = 1$  bis  $i = (N4 - M2)$ .

Der Verzicht auf die nicht „relevanten“ letzten  $M2$  Stück Meßwerte stellt bei der Registrierung bzw. Modellierung von in der Größe variierenden „Meßwerten“, wobei jedoch ihr Mittelwert stationär, d.h. zeitlich konstant ist, i. allg. keinen nennenswerten Fehler dar, da stets  $N4 \gg M2$  zu wählen ist. Bei nicht-stationären Meßwertabfolgen, die also nach einer gewissen Zeit in ihrer Größe zu Null werden, muß die Zahl  $N4$  wenigstens so groß sein, daß die letzten  $M2$  Stück Meßwerte bereits vernachlässigbar klein sind.

Man kann bei dem Meß- und Berechnungsvorgang zwei Fälle unterscheiden: Im Ersten Fall seien die Meßwerte bereits vorher aufgenommen, in einer K-Matrix als  $K(N)$ -Werte gespeichert und durch sukzessiven Abruf wieder verfügbar. Im zweiten Fall fallen die Meßwerte „online“ an, d.h. sie werden im Taktrhythmus der Abfolge der Samplingzeiten in den Computer aufgenommen, dabei finden die Produktberechnungen für jeden Meßwert noch innerhalb der momentanen Taktzeit statt. Die Normierung der AKF-Werte erfolgt dann erst abschließend. Im ersten Betriebsmodus muß der Computer über einen hinreichend großen Meßwertspeicher verfügen, im zweiten Fall muß er zur Erfassung größerer maximaler Verzögerungszeiten der Korrelation hinreichend schnell sein. Es handelt sich nämlich bei der AKA um die Verarbeitung „großer Datenmengen“ von i. allg. mehr als  $10^4$  bis hinauf zu  $10^{12}$  Meßwerten bzw. um Samplingzeiten bis herab zu Nanosekunden.

Numerisch und der Programmierung nach ist der Autokorrelator einfach zu realisieren. Wenn man nicht auf eine bereits installierte Software mit entsprechendem Befehlsatz zurückgreifen kann, genügen in einem einfachen Rechenprogramm (z.B. BASIC) wenige selbst programmierte Zeilen, wie sie im folgenden für den „Matrix-Betrieb“ beispielhaft angegeben sind. Für die Variablen gilt:  $N4$  Meßwerte sind in der Matrix  $K(i)$  abgelegt; die maximale Korrelationszeit umfaßt  $M2$  Zeitintervalle; Die Korrelationswerte stehen in der Matrix  $D(i)$ .

```

FOR M=1 TO M2+1 ! —A
D(M)=0 ! D - Register auf Null setzen
NEXT M ! —————A
FOR N=1 TO (N4-M2) ! —————B
  FOR M=1 TO M2+1 ! —————C
    D(M)=D(M) + K(N)*K(N+M-1) ! Produktbildung u. Ablage
  NEXT M ! —————C
NEXT N ! —————B
FOR M=1 TO M2+1 ! —————D
  D(M)=D(M)/(N4-M2) ! Normierung;  $\delta t$  ist gleich Eins gesetzt
NEXT M ! —————D

```

Zur Darstellung der „Leistungsfähigkeit“ des Autokorrelators sei folgende Abschätzung gegeben:

Wählt man die maximale Verzögerungszeit  $\tau_{\max}$  zu 10 Sekunden, was bei  $\delta t = 0,01$  [s] mit 1000+1 Speicherplätzen im Datenregister D(M) leicht zu realisieren ist, so lassen sich charakteristische Korrelationszeiten, das ist die Abfall-Zeitkonstante  $\vartheta$  einer exponentiell abklingenden AKF, bis zu einigen Sekunden sicher erfassen. – Für einen Beispielfall sei die gefundene Zeitkonstante  $\vartheta = 1$  [sec], so erhält man für einen Linienstrahler mit Lorentz-Linie (vergl. weiter unten) über die Beziehung  $2 \cdot \vartheta = 1 / \Delta\omega_{1/2}$  für diese Spektrallinie eine Halbwertsbreite  $\Delta\omega_{1/2}$  von 0,3 [Hz], wenn diese Spektrallinie im VIS-Bereich angesiedelt ist. Das entspricht dann einem auf diese Weise erreichbaren spektralen Auflösungsvermögen von ca.  $(\lambda / \Delta\lambda) = 1 \cdot 10^{15}$  im sichtbaren Spektralbereich.

Ist der Computer hinreichend schnell, so kann die „online“-Betriebsart gewählt werden. Man nimmt dabei zunächst in einem „Vorlauf“ (M2 + 1) Meßwerte in das (M2+1) Zeilen umfassende K-Register auf und beginnt danach mit dem zuerst eingegangenen Meßwert auf Platz N=1 die „Serie“ der Produktbildung: mit dem Wert K(1 + M - 1), wobei M läuft von 1 bis (M2+1). Zunächst entsteht also das Produkte mit sich selbst und dann fortschreitend mit den vorangegangenen Meßwerten die Produkte bis zu dem um die Zeit (M2\* $\delta t$ ) zuvor eingegangenen Meßwert. Die Produkte werden jeweils sogleich in dem der zugeordneten Zeitdifferenz entsprechenden D-Register, wie oben bereits dargestellt, addiert. – Danach werden alle Meßwerte im K-Register um einen Position zurückversetzt. Damit wird der letzte Platz frei für den nächsten neuen Meßwert und der bisher älteste Meßwert wird eliminiert. Diese „Maschine“ kann beliebig lange laufen, die Integrationszeit kann also sehr groß gemacht werden, und man braucht nur relativ wenig Speicher für die konstant (M2+1) Stück aktuellen Meßwerte im K-Register und die (M2+1) Stück Produktsummen im D-Register.

In diesem Fall der online-Datenverarbeitung bleiben ebenfalls die *letzten* M2 Stück Meßwerte als nicht „relevant“ außer Betracht, denn die Produktbildungsserie wird nur dann wieder in Angriff genommen, wenn der Platz (M2+1) im K-Register wieder einen neuen Wert aufgenommen hat. Dieser Verlust kann, wie oben bereits erläutert, i. allg. toleriert werden, wenn die Meßwertabfolge stationär ist oder, im nicht-stationären Fall, wenigstens die letzten M2 Stück Meßwerte bereits vernachlässigbar klein geworden sind.

## II B ] 2.) Prüfung der Funktion

Zur Überprüfung der Funktion des PC-Autokorrelators wurden Meßwertabfolgen aus Zeit-Funktionen mit bekannten Autokorrelationseigenschaften berechnet und in das K-Register eingegeben. Die angegebene Programmform lieferte stets die korrekte theoretische Autokorrelationsfunktion (AKF) als Resultat, d.h. bis auf einen durch die nur endliche Zahl der vorgegebenen diskreten Meßwerte bedingten relativ sehr kleinen Rauschanteil erhält man eine quantitative Übereinstimmung. Folgende Modellfälle sind dabei für die spätere Diskussion bemerkenswert:

### a) Elementarfunktionen

- 1.) Eine (stationäre) Meßwertfolge mit konstanten Werten  $Y_1$  liefert als AKF eine Konstante der Größe  $Y_1^2$ .
- 2.) Eine (stationäre) Meßwertfolge in der diskretisierten Form einer Sinusfunktion liefert der Erwartung entsprechend als AKF die korrekte Kosinusfunktion.
- 3.) Eine einzelne Exponentialfunktion als abfallende, d.h. nicht-stationäre Zeitfunktion zur Gewinnung der Meßwertabfolge liefert, wie aus der analytischen Rechnung gegeben, für die AKF 1. Ordnung richtig eine auf den Wert Null abklingende Exponentialfunktion mit gleicher Zeitkonstanten auf der Skala der Verzögerungszeit  $\tau \geq 0$ . Das Maximum liegt dabei bei  $\tau = 0$ .
- 4.) Eine einzelne Gauß-Funktion als nicht-stationäre Zeitfunktion zur Gewinnung der Meßwertabfolge mit Maximum bei dem Zeitpunkt  $t_m$  und der Relaxationszeit  $R$ , die in Relation zur Gesamtzeit  $\Delta t$  der Meßwertaufnahme so gestaltet ist, daß zur Start und Endzeit die relevanten Funktionswerte praktisch noch bzw. bereits wieder vernachlässigbar klein sind, liefert für die AKF 1. Ordnung für den Photonenstrom  $S(t)$  wieder eine Gauß-Funktion mit Maximum bei  $\tau = 0$ , die mit einer Relaxationszeit  $\vartheta$  über der  $\tau$ -Skala auf den Wert Null abklingt. Die Größe  $\vartheta$  ist um den Faktor  $\sqrt{2}$  größer, als die Relaxationszeit  $R$  der Gauß-förmigen Meßwert-Zeitfunktion  $S(t)$ :

$$AKF^{(1)}_S(\tau) \Big|_{\text{Einzel-Gauß-Form}} = \text{const} * \exp \left[ - \tau^2 / \vartheta^2 \right] \quad (\text{Gl. II / B 2 / 1})$$

$$\text{für } S(t) = \text{const} * \exp \left[ - (t - t_0)^2 / R^2 \right] \quad \text{mit } \vartheta = R * \sqrt{2}.$$

Dieses theoretisch-analytische Resultat erhält man quantitativ auch als AKF mit Hilfe des beschriebenen numerischen Computer-Autokorrelators.

Die Auswertung der AKF liefert also auch hier, d.h. ebenso wie bei einer Einzel-Exponential-Zeitform, in recht einfacher Weise die Relaxationszeit der primären Zeitfunktion des Photostromes. Es ist zu bemerken, daß diese Bestimmungsmöglichkeiten der Relaxationszeit bestehen bleiben, wenn die genannten Zeitformen jeweils als Einhüllende und/oder in statistischer Wiederholung in einem Photonenstrom auftreten (s. weiter unten).

Zur späteren Diskussion sei hier vorbereitend bereits erwähnt, daß im Fall einer Einzel-Gauß-Zeitfunktion die Häufigkeitsverteilung der Größe der Meßwerte U-förmig ist: Das Minimum der Häufigkeit liegt bei der Meßwertgröße, die betragsmäßig im Bereich der größten Steilheit der Zeitfunktion auftritt. Die Randmaxima der Häufigkeit liegen einerseits bei dem Maximalwert der Zeitfunktion und andererseits, mit der relativ größten Häufigkeit, nahe beim Wert Null, wenn die Parameter  $R$  und  $t_m$  in Relation zur zeitlichen Ausdehnung  $\Delta t$  der numerisch benutzten Gauß-Zeitfunktion wie oben angegeben gewählt sind.

**b) statistischen Meßwertabfolgen**

Bei einem nach Größe und „zeitlicher“ Abfolge völlig ungeordneten, also „statistischen“ Auftreten der (stets positiven) Meßwerte, ist keinerlei Korrelation zwischen den Meßwerten vorhanden und die normierte AKF fällt nach Art einer  $\delta$ -Funktion, ausgehend von dem durch das mittlere Quadrat aller Meßwerte gegebenen Wert bei der Verzögerungszeit  $\tau = 0$  bereits bei  $\tau = 1 * \delta t$ , also ab dem ersten Zeitverzögerungsschritt im Autokorrelator, auf den Wert ab, der dem Quadrat des Mittelwertes der Meßwerte entspricht. – Auf den Umstand, daß bei völlig fehlender Korrelation in der Zeitfunktion  $S(t)$  die  $AKF^{(1)}_s$  dann nicht auf Null abfällt, wenn der Mittelwert der Werte der Zeitfunktion  $S(t)$ , hier also der Mittelwerte der Meßwerte des Photonenstromes, nicht Null ist, wurde oben bereits hingewiesen.

Dabei hängt dieses Ergebnis grundsätzlich nicht davon ab, um welche Häufigkeitsdichte-Verteilung („Häufigkeitsverteilung“)  $H(Y)$  der Größe  $Y$  der Meßwerte es sich handelt. Es ändert sich von Fall zu Fall nur der Wert der AKF bei  $\tau = 0$  und der Wert der konstanten AKF bei  $\tau > 0$ .

Dementsprechend erhält man die qualitativ gleiche, d.h. ab  $\tau > 0$  konstant verlaufende AKF, wenn die Meßwerte, experimentell gemessen bzw. wie hier modelliert, vorliegen mit

i) statistischer Gleichverteilung in einem vorgegebenen Intervall, z. B.  $0 < Y < 1$ . Zur Modellierung dieses Falles wurde die Meßwert-Abfolge einfach mit dem internen Zufallsgenerator der Mathematik-Software erzeugt.

ii) statistisch *nicht* gleichverteilter Häufigkeitsdichte-Funktion.

Die statistisch ungeordnete Abfolge der Meßwerte, also die „Sampling-Werte“, erhält man im Rahmen einer numerischen Modellierung in solchen Fällen nicht statistisch gleichverteilter Häufigkeit mit Hilfe der bekannten Methode der sogen. Inversion (vergl. z.B. [9]). Diese durchzuführen setzt voraus, daß die zu erzeugende „Verteilungsfunktion“ integrierbar ist. Nach der Integration und Inversion der Funktion werden die Sampling-Werte dann in einer statistisch ungeordneten Abfolge, jedoch genau mit der vorgegebenen Häufigkeitsverteilung, mit den statistisch ungeordnet auftretenden Zufallszahlen  $Z$  berechnet, die ihrerseits dem Generator zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen  $Z$  im Intervall  $0 < Z < 1$  entnommen werden.

Es wurde drei unterschiedliche Häufigkeitsverteilungen modelliert:

$\alpha$ ) Exponentialverteilung mit der Häufigkeitsdichte-Funktion

$$H(Y) = H_0 * \exp [-Y/R] \quad (\text{Gl. II / B 2 / 2})$$

Die Meßwerte werden also berechnet mittels der Funktion

$$Y = R * [-\ln Z] \quad (\text{Gl. II / B 2 / 3})$$

mit  $Z$  = gleichverteilte Zufallszahl mit  $0 < Z < 1$ .

β) Gauß-Verteilung mit der Häufigkeitsdichte-Funktion

$$H(Y) = H_0 * \exp \{ - [(Y - Y_0)/R]^2 \} \quad (\text{Gl. II / B 2 / 4})$$

mit dem Maximum der Häufigkeit mit dem Wert  $H_0$  bei der Größe des Meßwertes  $Y = Y_0$  „

Da die Gaußsche Normalverteilung nicht integrierbar ist, wurde, wie im Anhang AH2 näher erläutert, eine Näherungsberechnung auf der Basis der „Fermi-Verteilung“ durchgeführt. - Die „sehr seltenen“ extrem kleinen und extrem großen Meßwerte mit  $Y < Y_{G1}$  bzw.  $Y > Y_{G2}$  wurden unberücksichtigt gelassen, um den numerischen Rechengang auf eine akzeptable Länge zu beschränken. Die Grenzwerte  $Y_{G1}$  und  $Y_{G2}$  sind dabei in Relation zum Wert  $Y_0$  geeignet gewählt worden.

Die Meßwerte  $Y$  wurden in diesem Sinne berechnet zu

$$Y = Y_0 + R * \ln[ (1/Z) - 1 ] \quad (\text{Gl. II B 2 / 5})$$

Die Abb. II / B 2 - 1, der die Parameter  $Y_0 = 2,0$ ;  $R = 0,2$ ;  $Y_{G1} = 1$  und  $Y_{G2} = 3$ ; Gesamtzahl der Meßwerte: 10000 zugrunde liegen, zeigt, um wenigstens ein numerisches Beispiel dazu auch graphisch zu präsentieren, die sich ergebende AKF. Es bestätigt sich dabei die  $\delta$ -Funktionsart für  $\tau = 0$  mit  $AKF_s^{(1)}(\tau = 0) = \langle Y^2 \rangle$  und (bis auf geringfügige Schwankungen infolge der endlichen Meßwert-Anzahl)  $AKF_s^{(1)}(\tau > 0) = (\langle Y \rangle)^2 = \text{const.}$

Die „Gauß-Verteilung“ ist aufgrund des „zentralen Grenzwertsatzes der Statistik“ die für hohe Versuchszahlen bei statistisch unabhängigen Ereignissen anzutreffende Häufig-

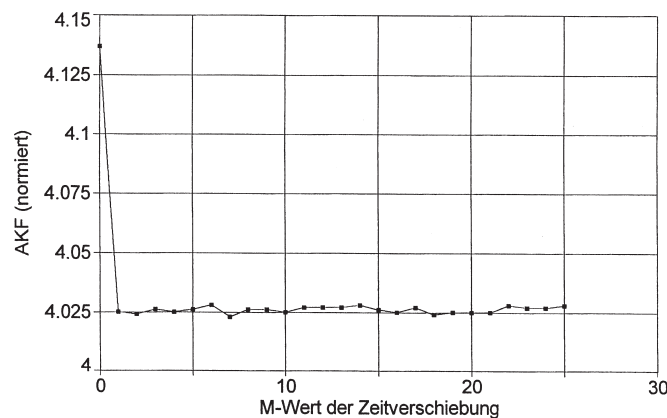


Abb. II / B 2 - 1 Autokorrelationsfunktion (AKF) einer rein statistischen Meßwertabfolge mit einer Gauß-förmigen Häufigkeitsverteilung der Meßwertgröße um den Mittelwert  $Y_0=2$  und der Relaxationskonstanten  $R=0,2$ . Die Zeitverschiebung im Autokorrelator ist  $\tau = M * \delta\tau$ .



keitsverteilung. Sie gilt näherungsweise z. B. auch für eine stochastische Binärfolge im Sinne einer zeitlichen Rechteck-Abfolge mit statistisch gleichverteilten Pulslängen und unabhängig davon statistisch gleichverteilten Pausen, wenn die Taktfrequenz mindestens 20-mal größer ist als die durch Tiefpaßfilterung gegebene obere Grenzfrequenz der spektralen Amplitudendichte [8].

γ) Doppelmaximum-Verteilung der Häufigkeit der „Meßwerte“

Eine Häufigkeitsverteilung  $H(Y)$  mit einem Doppelmaximum in der Gestalt

$$H(Y) = H_0 * \text{ABS} \{ F(Y) * [(Y - Y_0) / R] / [F(Y) + 1]^2 \} \quad (\text{Gl. II / B 2 / 6})$$

$$\text{mit } F(Y) = \exp \{ [(Y - Y_0) / R]^2 \}$$

die in Abb. II / B 2 - 2 dargestellt ist, läßt sich damit in der statistisch unkorrelierten Abfolge der Meßwerte gewinnen (nach Integration und Inversion) mittels der Formel

$$Y = R * \sqrt{[V * \ln\{(1/Z) - 1\}]} \quad (\text{Gl. II / B 2 / 7})$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad V &= -1 \quad \text{für} \quad \ln\{(1/Z) - 1\} < 0 \\ V &= +1 \quad \text{für} \quad \ln\{(1/Z) - 1\} > 0 \end{aligned}$$

und  $Z$  = gleichverteilte Zufallszahl mit  $0 < Z < 1$ .

Eine Häufigkeitsverteilung, die dieser analytischen Funktion in Gl. II / B 2 / 6 qualitativ etwa entspricht, ergibt sich z.B. für die unter β) genannte Rechteck-Abfolge, wenn das Verhältnis zwischen Taktfrequenz und oberer Grenzfrequenz und signifikant kleiner als 20 ist (vergl. [8]).

Als Ergebnis der Autokorrelationsanalyse erhält man auch in diesem Fall eine AKF, die der in Abb. II / B 2 - 1 völlig entspricht, also ausweist, daß keinerlei Korrelation in der zeitlichen Meßwertabfolge enthalten ist.

Diese Ergebnisse der „Prüfung“ des Computer-Autokorrelators bestätigen insgesamt nicht nur dessen einwandfreie Funktion, sondern weisen nochmals auf die Tatsache hin, daß aus Photonenströmen mit statistisch völlig ungeordneten zeitlichen Schwankungen keine signifikante Autokorrelationsfunktion zu gewinnen ist, die Rückschlüsse auf die Strahlungsqualität erlauben würde.

Allerdings kann bei sehr geringen Photonenraten, bei denen praktisch immer der innerhalb der Sampling-Zeit gewonnene Meßwert der Registrierung eines einzigen Photons entspricht oder längere Zeiten lang Null ist, auf andere Weise auf die Strahlungsqualität geschlossen werden. Dabei ist dann aber die *Häufigkeitsverteilung der sogen. „Wartezeiten“ zwischen zwei Photonen* Gegenstand der statistischen Analyse (siehe weiter unten in Abschnitt III / B 1).

Es sei an dieser Stelle auch auf den später noch folgenden Abschnitt IV / B 3 hingewiesen, in dem Rauschanteile behandelt werden, die sich additiv einem stationären Photonenstrom überlagern, der selbst keine weitere zeitliche Auflösung erfährt, weil die Photonenrate relativ gesehen zu hohe Werte besitzt.

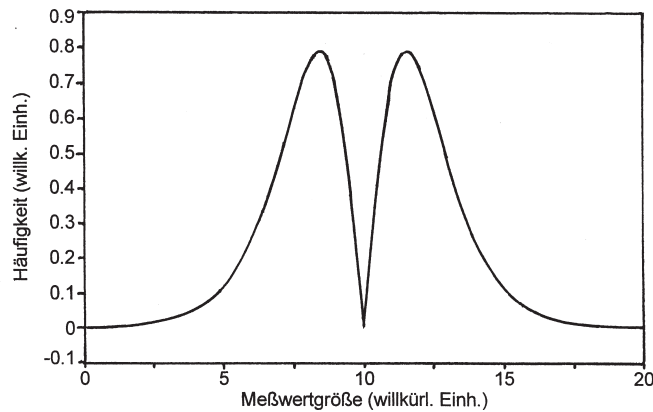


Abb. II / B 2 - 2 Modellfunktion für die Häufigkeitsverteilung der Meßwertgröße mit einem Doppelmaximum wie durch Gl. II / B 2 / 6 gegeben.

### II C ] Signalrauschen

Als Signalrauschen bezeichnet man die statistisch auftretenden und unkorrelierten Schwankungen der registrierten Signal-Zeitfunktion. Diese Schwankungen können bereits eine Eigenschaft des Signals sein und damit u. U. ein eigenständiger Gegenstand der Untersuchung, sie können aber auch eine überlagerte Störung bei der Aufnahme der „Meßwerte“ sein, die vom Photonendetektor bzw. der nachgeschalteten Signalverarbeitung ausgeht. In letzterem Fall definiert man ein „Eingangsrauschen“ des Gesamt-Meßsystems. Das Eingangsrauschen bestimmt naturgemäß die Eingangsempfindlichkeit der Meßapparatur [10], [11], [12]. – Bei Photonen-Zählern (vornehmlich Photomultiplier, Channel-Multiplier oder Avalanche-Photodioden) mit einer digitalisierten Signalverarbeitung kann man i. allg. annehmen, daß bei der Registrierung eines einzelnen Photons das Maximum der dabei auftretenden Signalgröße bereits um Größenordnungen über dem Effektivwert des Widerstandsrauschen am Ausgang liegt. Es kommen bei Photokathoden jedoch auch Zähl-Artefakte vor, deren Rate für Photokathoden mit optimalen Empfindlichkeiten bei ca. 200 nm Lichtwellenlänge im Vakuum nur etwa 0,1 pro Sekunde beträgt \*). Damit, und das soll hier der Fall sein, reduzieren sich die Betrachtungen praktisch auf den Rauschanteil des Photonenstromes selbst, wenn die Photonenrate entsprechend groß ist ( zur zeitlichen Abfolge von Einzel-Photonen bei sehr geringen Strahlungsintensitäten siehe weiter unten in Kapitel III ).

\* Spezifikation für den Channel-Photomultiplier Typ C 911 der Fa. Perkin Elmer optoelectronics, Wiesbaden, gemäß Prospekt 2000.

### 1.) Weißes Rauschen

Das sogen. „Weißes Rauschen“, das in der idealisierten Betrachtung alle Signalfrequenzen von Null bis Unendlich enthält, ist in seinen Fourier-Anteilen von gleichem Amplitudenbetrag und dabei in den Phasenlagen der inhärenten Sinusfunktionen relativ zueinander vollkommen unkorreliert. Die Sampling-Werte einer entsprechenden Signal-Zeitfunktion stellen also eine rein statistische Abfolge von „Meßwerten“ dar, wie bereits in Abschnitt II B 3 b diskutiert.

Praktisch liegt eine „weiße“ Rauschquelle z. B. beim Widerstandsrauschen (sogen. Nyquist-Rauschen) vor. Aus energetischen Gründen geht dabei jedoch die Spektralverteilung oberhalb von  $h\nu = kT$  ( $\approx 1/30$  eV für eine absolute Temperatur  $T=300$  K) asymptotisch gegen Null. Praktisch allerdings existiert meßtechnisch gesehen eine deutlich kleinere obere Grenzfrequenz durch den Einfluß erforderlicher Übertragungsglieder (Verstärker, Leitungen etc.). Überdies führen mehrstufige Wechselspannungsverstärker bei der Signalverarbeitung aufgrund der Stufenkopplung i. allg. auch noch zu einer unteren Grenzfrequenz von einigen Hertz. – In diesem Sinne führt also das elektronische System des Photonendetektors einschließlich Autokorrelator zu einer Frequenzbegrenzung der Rauschübertragung bzw. des Eigenrauschens. Es muß also generell und realistischer Weise stets „gefiltertes Weißes Rauschen“ betrachtet werden. – Die obere Begrenzungsfrequenz steht dabei in unmittelbarem Zusammenhang mit der kleinsten möglichen Samplingzeit  $\delta t$ .

Die Filterung des Weißen Rauschens betrifft nicht nur die Einführung einer oberen und/oder unteren Begrenzung der spektralen Verteilung sondern kann auch andere Formen annehmen und dabei u.U. Bestandteil einer speziellen Signalanalyse oder Signal-Modellierung sein. Derartige spezifische Filterungen lassen sich auch nachträglich numerisch an der Serie der diskreten Meßwerte vornehmen und betreffen dann insgesamt die detektierte Signal-Zeitfunktion. Filterungen an Serien von diskreten Meßwerten können z.B. mit Hilfe der numerischen Technik der „digitalen Filterung“ durchgeführt werden [13] [14].

Filterungen mit den entsprechenden Auswirkungen auf die spektrale Amplituden- bzw. Leistungsdichte des Signals können aber auch durch die numerische „Umformung“ der spektralen Amplitudendichte der primären Zeitfunktion der Meßwerte erfolgen. Dazu sind eine Fourier-Transformation der Zeitfunktion in den Frequenzraum, eine Multiplikation der spektralen Amplitudendichte mit einer entsprechenden „Transmissions- bzw. Übertragungsfunktion“ und dann wieder eine Fourier-Rücktransformation in den Zeitraum vorzunehmen.

Zur Modellierung entsprechender Photoströme kann man u.U. die analytische Form der Übertragungsfunktionen der als geeignet erscheinenden „Filter-Schaltungen“ bzw. die realen Transmissionsfunktionen optischer Filter verwenden. – Im folgenden sollen jedoch nur der Fall der „Breitband-Filterung“ mit einem Tiefpaß und der Fall der schmalbandigen „Resonanzfilterung“ des Weißen Rauschens in ihrer Auswirkung auf die Autokorrelationsfunktion als Beispiele vorgestellt werden.

## 2.) Gefiltertes Weißes Rauschen

Die sich durch „Filterung“ ergebenden spektralen Eigenschaften und damit auch das Autokorrelationsverhalten des gefilterten Weißen Rauschens werden hier mit Hilfe der komplexen Übertragungsfunktion  $\underline{G}(\omega)$  erfaßt, definiert als das Verhältnis der Ausgangs-Zeitfunktion  $E_{\text{Ausgang}}(t)$  zur Eingangs-Zeitfunktion  $E_{\text{Eingang}}(t)$ .

### a) Tiefpaß-Filterung

Erfährt das Weiße Rauschen mit seiner spektral konstanten Leistungsdichte  $W_0$  eine „**obere Kantenfilterung**“, d. h. wird das Spektrum des Weißen Rauschens oberhalb der Kanten-Frequenz  $\omega_{\text{max}}$  sprunghaft Null, so ist die Übertragungsfunktion die sogen. „Spaltfunktion“ und die  $AKF^{(1)}_E$  lautet :

$$AKF^{(1)}_E = 2 * W_0 * \omega_{\text{max}} * \sin(\omega_{\text{max}} * \tau) / (\omega_{\text{max}} * \tau) \quad (\text{Gl. II / C 2 / 1})$$

Für die Autokorrelation der Leistungsfunktion „S“, bzw. für eine entsprechende Photonenrate, ergibt sich aus der Siegert-Relation (Gl. II / A 2 / 4 und 5):

$$AKF^{(1)}_S = A + B * [ | \sin(\omega_{\text{max}} * \tau) / (\omega_{\text{max}} * \tau) | ]^2 \quad (\text{Gl. II / C 2 / 2})$$

$$\text{mit } A + B = AKF^{(1)}_S(\tau=0) \quad \text{und } A = AKF^{(1)}_S(\tau=\infty)$$

Eine streng sprunghafte obere Spektralbegrenzung ist jedoch praktisch nicht realisierbar. Realistischer ist eine abgerundete „Kante“, wie sie der **Tiefpaßfilterung** mittels eines RC-Gliedes mit der Übertragungsfunktion

$$\underline{G}(\omega) = 1 / (1 + i \omega RC) \quad (\text{Gl. II / C 2 / 3})$$

entspricht. Für die spektrale Leistungsdichte  $W(\omega)$  gilt dann allgemein:

$$W(\omega) = W_0 * | \underline{G}(\omega) |^2 \quad (\text{GL. II / C 2 / 4})$$

$$\text{mit} \quad | \underline{G}(\omega) |^2 = 1 / (1 + \omega^2 R^2 C^2) \quad (\text{Gl. II / C 2 / 5})$$

Für die Autokorrelation  $AKF^{(1)}_E(\tau)$  erhält man nach dem Wiener - Khinchin - Theorem (s. Gl. II / A 2 / 2):

$$AKF^{(1)}_E(\tau) = AKF^{(1)}_E(\tau=0) * \exp[-|\tau| / (RC)] \quad (\text{Gl. II / C 2 / 6})$$

und für die Autokorrelation der Leistungsfunktion „S“, bzw. für eine Photonenrate gleicher entsprechender Zeitfunktion, nach der Siegert - Relation (s. Gl. II / A 2 / 4 und 5)

$$AKF_s^{(1)}(\tau) = A + B \cdot \exp[-(2 \cdot |\tau|) / (RC)] \quad (\text{Gl. II / C 2 / 7})$$

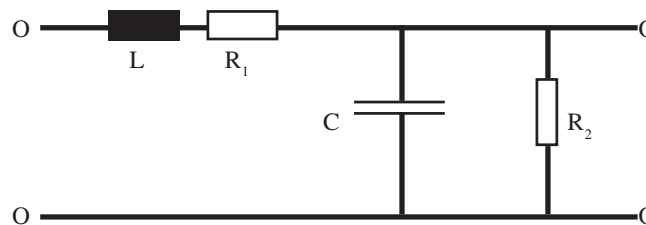
$$\text{mit } A + B = AKF_s^{(1)}(\tau=0) \text{ und } A = AKF_s^{(1)}(\tau=\infty)$$

Man erhält also für das mit dem Tiefpaß gefilterte Weiße Rauschen eine rein exponentiell relaxierende Funktion  $AKF_s^{(1)}(\tau)$  und kann daraus in einfacher Weise die Zeitkonstante des RC-Filters entnehmen. - Es sei hier aber bereits erwähnt, daß der Umkehrschluß nicht möglich ist, d.h. von einer gefundenen  $AKF_s^{(1)}(\tau)$  der Form nach Gl. II / C 2 / 7 kann man nicht ohne weiteres auf das Vorliegen einer Photonenrate schließen, deren Zeitverlauf einem Weißen Rauschen mit RC-Tiefpaß-Filterung entspricht (vergl. weiter unten).

Es sei noch erwähnt, daß man eine Tiefpaß-Filterung auch nachträglich an diskreten „Meßwerten“, also auch an bereits vorliegenden (experimentell oder durch Modellierung gewonnenen) Sampling-Werten durchführen kann, indem man numerisch eine „Glättung“ (= smoothing) der Wertabfolge durchführt. Das gelingt z. B. mit einem entsprechend modifizierten Spline-Programm [A5] oder durch die bereits oben erwähnte „digitale Filterung“, jeweils mit entsprechenden Programm-Parametern.

### b) Resonanz-Filterung

Die „Resonanz-Filterung“ ist eine andere und ebenfalls häufig zu behandelnde Form der Filterung des Weißen Rauschens. Sie erfolgt z.B. mit einem RCL-Übertragungsglied in der Form eines Parallel-Resonanzkreises mit dem Ersatzschaltbild:



Dabei ist:

$$\underline{G}(\omega) = (\omega_0)^2 / [(\alpha + i\omega)^2 + (\omega_{\text{res}})^2] \quad (\text{Gl. II / C 2 / 8})$$

$$\text{mit } (\omega_0)^2 = 1/(LC) \quad , \quad \alpha = (1/2) * [(R_1/L) + 1/(R_2 C)] \quad \text{und} \quad (\omega_{\text{res}})^2 = (\omega_0)^2 - \alpha^2$$

Dabei entspricht  $\omega_{\text{res}}$  der Eigen-Kreisfrequenz des gedämpften und  $\omega_0$  der Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators.

Es gelten in analoger Ableitung wie oben die folgenden Beziehungen:

$$|\underline{G}(\omega)|^2 = (\omega_0)^4 / \{ [\alpha^2 - \omega^2 + (\omega_{\text{res}})^2]^2 + [2\alpha\omega]^2 \} \quad (\text{Gl. II / C 2 / 9})$$

$$\text{AKF}_E^{(1)}(\tau) = \text{AKF}_E^{(1)}(\tau=0) * \exp[-(\alpha |\tau|)] * \cos(\omega_{\text{res}} \tau) \quad (\text{Gl. II / C 2 / 10})$$

$$\text{AKF}_S^{(1)}(\tau) = A + B * \{ \exp[-(2 * \alpha * |\tau|)] * \cos^2(\omega_{\text{res}} * \tau) \} \quad (\text{Gl. II / C 2 / 11})$$

$$\text{mit } A + B = \text{AKF}_S^{(1)}(\tau=0) \text{ und } A = \text{AKF}_S^{(1)}(\tau=\infty)$$

Man erhält also auch in diesem Fall der Resonanzfilterung eine exponentiell relaxierende Funktion, die jedoch als Einhüllende des oszillierenden Anteils der  $\text{AKF}_S^{(1)}(\tau)$  auftritt. Liegt, um die Diskussion auf den optischen Fall zu übertragen, die Resonanzfrequenz jedoch z.B. im sichtbaren Spektralbereich, so kann der optische Detektor aufgrund seiner Trägheit i. allg. der entsprechenden Oszillation des Poynting-Vektors der elektromagnetischen Welle nicht folgen. Die  $\text{AKF}_S^{(1)}(\tau)$  reduziert sich damit auf eine rein exponentiell auf den asymptotischen Endwert abfallende Funktion, der man den Dämpfungsparameter  $\alpha$  leicht entnehmen kann. - Interessanter Weise liegt damit qualitativ das gleiche funktionale Endergebnis für die  $\text{AKF}_S^{(1)}(\tau)$  vor, wie bei der Tiefpaß-Filterung (s. oben).

Auf die Parallelität des Ergebnisses mit dem der Behandlung der Strahlungsemission des klassischen Oszillators in der Form der sogen. Lorentz-Linie (s. Abschnitt III A 1) sei hier bereits hingewiesen.

**Zur Interpretation einer relativ schmalbandigen Filterung** sei noch folgender Hinweis eingefügt:

Das „Schmalbandrauschen“, d.h. das quasi „linienförmig“ gefilterte Rauschen, das zwar relativ monochromatisch mit  $\omega_1$  erfolgt, aber immer noch Phasenschwankungen enthält, kann man als eine Sinusschwingung mit einer zeitabhängigen Amplitude  $E_0(t)$  in der Form:

$$E(t) = E_0(t) * \sin(\omega_1 t), \quad (\text{Gl. II / C 2 / 12}),$$

also als modulierte Sinusschwingung mit  $E_0(t)$  als der Einhüllenden, auffassen, wobei nach Voraussetzung die spektralen Anteile der zeitlichen Modulation relativ weit unterhalb von  $\omega_1$  liegen. Dann gilt generell für die  $\text{AKF}_E^{(1)}$

$$\text{AKF}_E^{(1)}(\tau) = [E(t) * E(t + \tau)]_{\text{zeitl. Mittel}} * \{ \sin(\omega_1 t) * \sin[\omega_1(t + \tau)] \}_{\text{zeitl. Mittel}} \quad (\text{Gl. II / C 2 / 13})$$

bzw. nach getrennter Berechnung der beiden Mittelwerte:

$$\text{AKF}_E^{(1)}(\tau) = \text{AKF}_{E_0}^{(1)}(\tau) * (1/2) \cos(\omega_1 \tau) \quad (\text{Gl. II / C 2 / 14})$$

Man erhält also wieder eine harmonische Funktion gleicher Frequenz, wobei die Einhüllende die AKF der Modulationsfunktion ist.

Ist nun z.B. die Modulationsfunktion eine Exponential-Funktion der Form

$$E_0(t) = E_{\text{Expo}}(t) = E_{\text{max}} * \exp(-t / \vartheta) \quad (\text{Gl. II / C 2 / 15})$$

mit der Autokorrelationsfunktion  $AKF_{E, Expo}^{(1)}(\tau)$

$$AKF_{E, Expo}^{(1)}(\tau) = \text{const} * \exp(-\tau / \vartheta) \quad , \quad (\text{Gl. II / C 2 / 16})$$

so erhält man mit der Siegert-Relation für diesen Fall, die Mittelung über  $\cos^2(\omega_1 * \tau)$  ist wieder vorausgesetzt, die gleiche rein exponentielle Abhängigkeit der  $AKF_s^{(1)}(\tau)$  von der Verzögerungszeit  $\tau$  wie oben aus Gl. II / C 2 / 11 bei der Resonanzfilterung von Weißem Rauschen, wobei die Parameter natürlich eine andere Interpretation erfahren haben. Der Grund für diese „Korrelationsverwandtschaft“ liegt darin, daß in beiden Fällen in der Signal-Zeitfunktion der Photonenrate bzw. in der zeitlichen Abfolge der registrierten Meßwerte signifikant eine Exponentialfunktion auftritt.

### 3.) Überlagertes Rauschen

Ist einem Sinussignal additiv und unkorreliert ein Breitband- oder Schmalbandrauschen überlagert, so fällt in der  $AKF_s^{(1)}$  der zum Rauschen gehörige Anteil nach Maßgabe der Bandbreite nach relativ kurzer Korrelationsverzögerungszeit  $\tau$  auf Null ab und es bleibt, i. allg. gut separierbar, der kosinusförmige Anteil des Signals übrig. Da zwischen dem Sinussignal und dem Rauschanteil nach Voraussetzung keine Korrelation besteht, treten keine Kreuzmodulationsanteile in der Autokorrelationsfunktion auf. – Auf diese speziellen Aspekte der Isolierung von periodischen bzw. repetierten Signalfunktionen bei relativ starker Überdeckung durch Rausch-Überlagerung soll hier nicht näher eingegangen werden.

Allerdings können in den Rauschanteilen seinerseits quasi-periodische Zeitabhängigkeiten enthalten sein, die sich insbesondere dann nicht mehr hinreichend durch die Mittelwertbildung bei gegebener Verzögerungszeit im Autokorrelator gegenseitig aufheben, wenn die Anzahl der Meßwerte zu gering ist. Es treten dann in der  $AKF_s^{(1)}(\tau)$  aus diesem Rauschanteil quasi-oszillatorische Anteile auf, die ein eigenes Relaxationsverhalten in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit  $\tau$  besitzen.

Ist ein entsprechender Rauschanteil einer Signalfunktion überlagert, die für sich alleine genommen bereits eine exponentielle Relaxation der  $AKF_s^{(1)}$  zeigt, so muß eine Analyse der Abfallkurve stattfinden mit dem Ziel, die beiden enthaltenen Exponentialfunktionen zu separieren. Sind dabei die Relaxationszeiten hinreichend verschieden, so gelingt dies i. allg. bereits mit einer logarithmischen Auftragung der  $AKF_s^{(1)}(\tau)$ , d.h. anhand des Graphen  $\ln(AKF_s^{(1)})$  vs.  $\tau$ .

Im Fall eines hinreichend großen, stationären Photonenstromes, bei dem das Eintreffen der einzelnen Photonen zeitlich nicht mehr aufgelöst werden kann, werden i. allg. nur noch die statistischen Schwankungen des Mittelwertes registriert. Das entspricht einem symmetrisch um den Nullwert verteilten Rauschanteil, der dem konstanten (Mittel-) Wert additiv überlagert ist. Dabei können die Rauschamplituden eine unterschiedliche Häufigkeitsverteilung, z.B. Gleichverteilung in einem Intervall oder Gauß-Verteilung, besitzen. In diesem Fall relaxiert die  $AKF_s^{(1)}$  nicht mehr auf Null, sondern nimmt auf das Quadrat dieses Mittelwertes ab. Das Relaxationsverhalten hängt dabei von der Häufigkeitsverteilung der Rauschamplitude und der spektralen Amplitudendichte, also generell

von der Zeitfunktion des Rauschanteils ab. - Diese Situation bzw. ihre Modelldarstellung wird im Abschnitt IV / B 3 gesondert behandelt.

### III Photonenstatistik

Die Behandlung der Photonenstatistik läßt sich nach Maßgabe der jeweiligen Lichtquellen einteilen. Zwei „Klassen“ sind dabei aufgrund der gegebenen „Ausdehnung“ der spektralen Amplitudendichte zu unterscheiden: 1. „Linienstrahler“ mit relativ eng begrenzter Ausdehnung und 2. „Breitbandstrahler“ mit relativ breiten spektralen Emissionsbereichen. Für beide Klassen sollen einige typische Vertreter vorgestellt, d.h. in Bezug auf die dabei auftretende Autokorrelationsfunktion betrachtet werden.

#### A J Linienstrahler

Die atomaren Linienstrahler sind meist im Materialbereich der verdünnten Materie zu finden, sei es, daß es sich um Gase bei vermindertem Druck handelt, sei es, daß eine Emission aus bzw. in kondensierter Materie stattfindet, wobei sich die emittierenden Atome bzw. Moleküle zwar in einer „Matrix“ befinden, dort aber sowohl untereinander, als auch mit den „Wirtsatomen“ in nur relativ geringer Wechselwirkung stehen. Ferner sind i. allg. die LASER Linienstrahler aufgrund der spektralen Selektivität der inhärenten Resonatoren. Die jeweils vorliegende spektrale Amplitudendichte ist jedoch ganz unterschiedlich, sei es, daß die Spektrallinie durch spezifische Wechselwirkungsmechanismen verbreitert ist, sei es, daß sich in einer phänomenologischen Spektral-„Linie“ eine „Feinstruktur“ durch Überlagerung mehrerer Einzellinien unterschiedlicher Stärke ergibt.

Hier sollen jedoch nur vier grundsätzliche Fälle behandelt werden. Vom Modellstandpunkt aus gesehen, sind dabei zunächst die Spektralformen der „klassischen“ Lorentz- und Gauß-Linie zu nennen. Danach folgt eine kurze Behandlung der primären und der gestreuten LASER-Strahlung.

#### 1.) Lorentz- und Gauß-Spektrallinie

Die Modelldarstellung der klassischen optischen Spektrallinie basiert auf der Lösung der Bewegungsgleichung eines elektrisch geladenen „gedämpften Oszillators“, wobei eine zur Geschwindigkeit  $y'$  der bewegten Ladung proportionale Reibungskraft auftritt:

$$m y'' + \gamma y' + g y = 0 \quad (\text{Gl. III / A 1 / 1})$$

mit  $g$  = „Federkonstante“ der Rückstellkraft ;  
 $m$  = träge Masse des Oszillators ;  $\gamma$  = Reibungskonstante

Nach einmaliger Auslenkung tritt,  $\gamma/m \ll \omega_0$  vorausgesetzt, eine *freie gedämpfte* Schwingung auf. Von der bewegten Ladung geht damit ein nicht stationäres elektrisches Wechselfeld mit der Zeitfunktion  $E(t)$  aus:



$$E(t) = E_0 * \exp(-t / \vartheta) * \cos(\omega_0 t) \quad (\text{Gl. III / A 1 / 2})$$

mit der Abkling-Zeitkonstanten  $\vartheta = 2 * m / \gamma$ ,

das sich im Sinne einer elektromagnetischen Welle ausbreitet.

Für die Eigenfrequenz  $\omega_0$  des gedämpften Oszillators gilt:

$$(\omega_0)^2 = (g / m) - (1 / \vartheta^2) \quad (\text{Gl. III / A 1 / 3})$$

Aus der Fouriertransformation von  $E(t)$  erhält man die komplexe spektrale Amplitudendichte zu [15]:

$$\underline{A}(\omega) = E_0 / [(1/\vartheta) + i(\omega - \omega_0)] \quad (\text{Gl. III / A 1 / 4})$$

Die spektrale Energiedichten  $F(\omega)$  der abgestrahlten Leistung dieser sogen. „**Lorentz-Linie**“ hat

$$\text{damit den Wert: } F(\omega) = C * |\underline{A}(\omega)|^2 = C * E_0^2 * (1/\Delta\omega_{1/2})^2 / [(1/4) + X^2] \quad (\text{Gl. III / A 1 / 5})$$

mit  $X = [(\omega - \omega_0) / \Delta\omega_{1/2}]$

und  $\Delta\omega_{1/2}$  = energetische Halbwertsbreite =  $(2 / \vartheta)$

und die auf die Fläche Eins unter der Spektralkurve normierte spektrale Leistungsdichte  $W(\omega)$  ist die Funktion [2]:

$$[W(\omega)]_{\text{normiert}} = [1/(\Delta\omega)_{1/2}] * 1 / [(1/4) + X^2] \quad (\text{Gl. III / A 1 / 6})$$

In atomistisch differenzierteren Modellen kann die Dämpfung durch die „Reibungskraft“ auch als Ausdruck der durch abbremsende Stöße und/oder die Leistungsabstrahlung hervorgerufenen Energiedissipation verstanden werden.

Die **Autokorrelationsfunktion** der Zeitfunktion der elektrischen Feldstärke  $AKF^{(1)}_{E, \text{ Lorentz-Linie}}$  hat die Form (vergl. [4]):

$$[AKF^{(1)}_E]_{\text{Lorentz-Linie}}(\tau) = \text{const} * \cos(\omega_0 \tau) * \exp[-(\Delta\omega)_{1/2} \tau] \quad (\text{Gl. III / A 1 / 7})$$

Entsprechend der Siegert-Relation (Gl. II / A 2 / 5) läßt sich damit die Autokorrelationsfunktion zweiter Ordnung bezogen auf die elektrischen Feldstärke bzw. nach (Gl. II / A 2 / 4) die Autokorrelationsfunktion erster Ordnung bezogen auf den detektierten Strahlungsfluß  $S$  berechnen.

Da von dem Autokorrelator bei der homodynem Messung von  $AKF^{(1)}_s(\tau)$  die darin enthaltene Modulation mit  $\cos^2(\omega_0 \tau)$  bei der extrem hohen, weil optischen Frequenz  $\omega_0$  (in der Regel) zeitlich nicht aufgelöst werden kann, ergibt sich eine gemessene Autokorrelationsfunktion der Photonennrate in der Form:

$$[AKF^{(1)}_S(\tau)]_{\text{Lorentz-Linie}} = \text{const} + \text{const} * \exp[-(\Delta\omega)_{1/2} * 2 * \tau] \quad (\text{Gl. III / A 1 / 8})$$

Es handelt sich also um eine rein exponentiell auf einen konstanten Wert abfallende Funktion und dieser kann man auf einfache Weise die spektrale Halbwertsbreite  $(\Delta\omega)_{1/2}$  der Lorentz-Linie entnehmen. – Wie oben bereits ausgeführt, ist dabei im VIS-Spektralbereich das mit Verzögerungszeiten im Autokorrelator von etwa 10 Sekunden erreichbare spektrale Auflösungsvermögen mit ca.  $10^{15}$  außerordentlich hoch, so daß auch sehr schmale Spektrallinien entsprechend analysiert werden können.

Im statistischen Sinne der Quantenoptik handelt es sich bei dem Elementarprozess der Abstrahlung eines Wellenzuges elektromagnetischer Felder entsprechend der Lorentz-Linie um die Emission von Photonen, deren Quantenenergie und Häufigkeitsverteilung der obigen spektralen Leistungsdichte entspricht. Die beteiligten Energieniveaus sind dabei durch „Aufspaltung“ entstanden und werden in ihrer spektralen Beteiligung durch eine kombinierte Zustandsdichtefunktion und spektral abhängige Übergangswahrscheinlichkeiten beschrieben.

Der zu registrierende Photonenstrom besteht damit im Mittel vieler Anregungsprozesse bzw. , wenn ein ergodisches statistisches Verhalten vorausgesetzt werden kann, bei einem größeren Ensemble derartiger Oszillatoren als Strahlungsquelle aus der statistisch-zeitlichen Abfolge solcher Photonen.

Lorentz-Linien dieser Art finden sich u. a. bei der Lichtemission von Niederdruck-Gasentladungslampen, wenn der Gasdruck aber doch so hoch ist, daß die Stoßdämpfung bei der Kollision der Gasteilchen überwiegt.

Ist der Gasdruck wesentlich niedriger, so tritt die Stoßdämpfung als Verbreiterungsmechanismus der Spektrallinie hinter die Verbreiterung aufgrund des Doppler-Effektes bei der thermischen Teilchenbewegung zurück. In diesem Fall ist die spektrale Amplitudendichte, insbesondere im Spektralbereich um die Resonanzfrequenz, charakterisiert durch eine Gauß-Funktion und man spricht von einer „**Gauß-Linie**“. Aus deren Linienbreite kann man z.B. die Gastemperatur bestimmen.

Ist der Betrag der spektralen Amplitudendichte eine Gauß-Funktion, so liefert die inverse Fourier-Transformation die Zeitfunktion der elektrischen Feldstärke zu

$$[E(t)]_{\text{Gaußlinie}} = E_0 * \{ \exp[-2 * (t-t_0)^2 / \vartheta^2] \} * \cos(\omega_0 * t) \quad (\text{Gl. III / A 1 / 9})$$

mit dem zeitlichen Maximum bei  $t = t_0$ . Es handelt sich also um die Gauß-förmige Modulation einer Kosinus-Oszillation mit  $\omega_0$ . Da der detektierte Strahlungsfluß  $S(t)$  proportional ist zu

$[|E(t)|]^2$  bei Mittelung über den Oszillationsterm, so gilt:

$$S(t) = \text{const} * [E_0 * \{ \exp[-(t-t_0)^2 / \vartheta^2] \}]^2 \quad (\text{Gl. III / A 1 / 10})$$

Diese Zeitfunktion kann bei der Modellierung des Photonenstromes verwendet werden (vergl. weiter unten).

Nach analogen Rechnungen wie oben erhält man für die Gauß-Linie eine spektrale Leistungsdichte  $W(\omega)$  der Form [2] :

$$[W(\omega)]_{\text{Gauß-Linie}} = \text{const.} * (1/d\omega) * \exp \left\{ - [2 * \sqrt{\ln 2}] * (\omega - \omega_0) / (\Delta\omega)_{1/2} \right\}^2 \quad (\text{Gl. III / A 1 / 11})$$

und damit eine Autokorrelationsfunktion ersten Grades für die Photonenrate:

$$[AKF_s^{(1)}(\tau)]_{\text{Gauß-Linie}} = \text{const} + \text{const} * \exp \left\{ - [(\Delta\omega)_{1/2} * \tau / \sqrt{\ln 2}]^2 \right\} \quad (\text{Gl. III / A 1 / 12})$$

Die  $[AKF_s^{(1)}(\tau)]_{\text{Gauß-Linie}}$  ist also bis auf die additive Konstante selbst Gauß-förmig, und auch hier ist es möglich, durch funktionale Anpassung die vorliegende Halbwertsbreite der Gauß-Spektrallinie zu bestimmen.

Es sei bemerkt, daß von der „Gauß-Linie“ Begriffe wie „Gaußsches Strahlungsfeld“ bzw. „Gauß-Licht“ zu unterscheiden sind. Dabei handelt es sich nicht um die Charakterisierung einer bestimmten Spektralverteilung, sondern vielmehr um eine spezielle Form der Häufigkeitsverteilung des Auftretens der Größe der elektrischen Feldstärke in einem elektromagnetischen Strahlungsfeld. Dieser Sachverhalt wird in Abschnitt III / C behandelt.

### III A ] 2.) Laser-Strahlung

Bei der Laser-Strahlung handelt es sich um elektromagnetische Wellen, die aus einem resonanzfähigen Volumen, dessen Wandung hochreflektierend ist und dessen Eigenfrequenz interferenzbedingt quasimonochromatisch festliegt, ausgekoppelt wird. Die Resonanzschwingung wird dabei durch stimulierte Photonenemission in der raumfüllenden Materie soweit entdämpft, daß die Güte des Resonators sehr groß und damit Linienbreite der emittierten Strahlung relativ zu den z.B. thermisch emittierten Spektrallinien verdünnter Gase um viele Größenordnungen kleiner ist. Zugleich ist damit die Kohärenzlänge der emittierten Wellenzüge entsprechend größer. Im Unterschied zu der Signal-Zeitform der Spannung an einem entdämpften elektrischen Resonator der NF- und HF-Technik ist jedoch beim Laser die Kohärenzlänge der abgestrahlten Wellenzüge nicht unendlich. Die Spektralverteilung der primären Laser-Strahlung ist im Sinne der Fourierdarstellung des abgestrahlten Wellenzuges zu beschreiben und durch eine (entsprechend sehr kleine) Halbwertsbreite zu charakterisieren ist. Insofern liegt also beim Laser auch ein „Linienstrahler“ vor.

Von den weiteren Qualitäten und Quantitäten der primären Laser-Strahlung, z. B. von der geringen Winkeldivergenz bei der Abstrahlung und der hohen spektralen Leistungsdichte bei der Resonanzfrequenz, wird hier abgesehen. Auch sei von „nicht-klassischen“ Phänomenen, wie z.B. „verschränkten“ Photonenpaaren (s. dazu [A11]) oder „gequetschten“ (engl. squeezed) Photonenzuständen (s. dazu [A12]) abgesehen.

Die extrem kleine Halbwertsbreite der Spektrallinie führt in der Meßpraxis insofern zu einem besonderen Autokorrelationsverhalten, als hier bei mäßigen Strahlungsintensitäten

i. allg. bereits kein Relaxieren der AKF mehr zu messen ist. Die AKF verläuft, vom Wert bei  $\tau = 0$  wieder ausgenommen, konstant [A6].

Außerdem ist dem emittierten Strahlungsfluß ein „Rauschanteil“ (vergl. weiter unten) überlagert. Beides rührt von der im optischen Spektralbereich signifikant stärker in Erscheinung tretenden Quantenstruktur des Lichtes her, verändert jedoch zunächst das Autorrelationsverhalten detektierter Photonenströme nicht. Von den Veränderungen, die das primäre Laser-Licht beim Durchgang durch Materie erfahren kann, sei hier auch zunächst noch abgesehen (vergl. dazu weiter unten).

Von der Modellierung der Spektralverteilung der Laser-Strahlung ist die Beschreibung der Statistik der zeitlich strukturierten Emission der Photonen, d.h. die Erfassung der Gesetzmäßigkeit der Meßwertabfolge bei der Detektion des Photonenstromes im Autokorrelator zu unterscheiden.

Insbesondere ist die Statistik der Photonenemission beim Laser im Vergleich z. B. mit der Photonenabstrahlung bei einer thermisch angeregten Lichtquelle mit Emission einer Spektrallinie eine signifikant andere: Bei Laser-Strahlung erfolgt die Photonenemission statistisch unabhängig und stets mit der gleichen Einzelwahrscheinlichkeit, denn es dominiert die *stimulierte* Emission infolge der gegebenen Besetzungsinversion der beteiligten Energieniveaus. Bei der Temperatur-Strahlung dagegen dominiert die *spontane* Emission und Absorption. Dabei kann es aber doch auch unregelmäßig zu einer stimulierten Emission kommen. Infolge dieser unregelmäßigen „Rückkopplung“ tritt ein signifikanter „Bunching-Effekt“ in der zeitlichen Photonenabfolge auf (vergl. weiter unten).

**Zur Statistik der Photonen-Emission bei der Laser-Strahlung sollen zunächst einige grundlegende Ausführungen gegeben werden:**

Aufgrund der Gleichwahrscheinlichkeit der Photonengeneration folgt die Photonenstatistik bei der (idealisierten) Laser-Emission bei sehr geringen Emissionsraten, sprich sehr geringen Strahlungsintensitäten, nach der Binomial-Verteilung (BNV), bei mittleren Emissionsraten nach der Poisson-Verteilung (POV) und bei hohen Intensitäten im Sinne des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung nach der Gauß-Verteilung. Speziell die Gültigkeit der BNV bzw. der POV, die beide die statistische Unabhängigkeit der „Ereignisse“ und deren Gleichwahrscheinlichkeit für die Emission zur Voraussetzung haben, beinhaltet die Aussage, daß es sich im Vergleich mit z. B. der Bose-Einstein-Verteilung (BEV), die für die Temperaturstrahlung gilt (s. weiter unten), um eine relativ „regelmäßige“ statistische Photonenemission handelt.\*)

Betrachtet man zunächst den Fall sehr geringer Intensitäten, so daß der Photonenzähler innerhalb seiner „Sampling-Zeit“  $\delta t$  entweder nur *ein* Photon oder *kein* Photon registriert, so ist damit also vorausgesetzt, daß die Photonenrate  $r \ll 1/\delta t$  ist. „Zählverluste“ im

---

\* Bei der Strahlung von Lasern bzw. Masern wird unter speziellen Bedingungen eine noch schmalere Verteilung als die Poisson-Verteilung beobachtet [A6] [12b], die als „Sub-Poisson-Verteilung“ bezeichnet wird. – U. U. tritt jedoch auch eine etwas breitere und dann als „Super-Poisson-Verteilung“ gekennzeichnete statistische Funktion auf.

Detektor seien hier bei dem Photonennachweis ausgeschlossen. Die minimal erreichbare Sampling-Zeit setzt sich meßtechnisch aus der Breite des vom Detektor produzierten Signalspulses für ein Photon und der „Erholungszeit“, das ist die sogen. „Totzeit“, der Elektronik nach der Abgabe des Signalspulses zusammen. Zur Bestimmung der eintreffenden Photonenrate  $r$  wird die Zahl der Photonen in einem hinreichend langen Zeitabschnitt  $t_0$  gemessen oder aus einer entsprechenden Leistungsbilanz berechnet:

$$r = \Phi / (h \cdot \nu) \quad ; \text{ mit } \Phi = \text{detektierter Strahlungsfluß [in Joule/sec]} \quad (\text{Gl. III / A2 / 1})$$

$$h \nu = \text{Photonenenergie [in Joule]}$$

Die Einzelwahrscheinlichkeit  $p$  zur Emission eines Photons im Sinne der BNV ist generell gegeben als Quotient aus Zahl der auftretenden „günstigen Ereignisse“ und der Zahl der „Versuche“. Hier gilt also:

$$p = r \cdot t_0 / (t_0 / \delta t) = r \cdot \delta t \quad (\text{Gl. III / A2 / 2})$$

Bezieht man sich auf die Frage nach der Registrierung von  $m$  Photonen innerhalb einer „Testzeit“  $\Delta t$ , in der also  $n = \Delta t / \delta t$  „Versuche“ stattfinden, so liefert die BNV die Wahrscheinlichkeit  $P(n, m)$  für die Registrierung von  $m$  Photonen in dieser Testzeit in der Form:

$$P(n, m)_{\text{BNV}} = (n \text{ über } m) \cdot p^m \cdot (1-p)^{(n-m)} \quad (\text{Gl. III / A2 / 3})$$

Der **Mittelwert**  $\mu$  der Photonenzahl in der Testzeit  $\Delta t$  ist dann:

$$\mu = r \cdot [n \cdot \delta t] = r \cdot [\Delta t] \quad (\text{GL. III / A2 / 4a})$$

$$\text{Andererseits gilt} \quad \mu = n \cdot p \quad (\text{GL. III / A2 / 4b}).$$

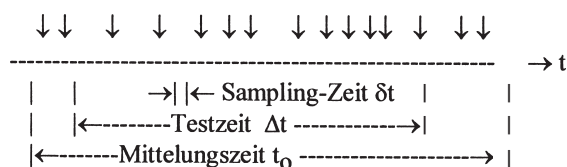
Für die **Varianz**  $V$ , zugleich das Quadrat der **Standardabweichung**  $\sigma$ , definiert als der arithmetische Mittelwert der „quadratischen Abweichungen“, gilt allgemein :

$$V = \sigma^2 = \sum_{m=0}^{m=n} (m-\mu)^2 \cdot P(n, m) \quad (\text{Gl. III / A2 / 5})$$

Damit ist dann das **relative mittlere Rauschquadrat**  $\mathfrak{R}$  berechenbar, das definiert ist als:

$$\mathfrak{R} = \text{Varianz} / (\text{Mittelwert})^2 \quad (\text{Gl. III / A2 / 6}).$$

Die folgende schematische Skizze erläutert die verwendeten Zeitabschnitte und enthält die „Photonen-Ereignisse“ „↓“ mit der Rate  $r$  in statistischer Abfolge:



Die Varianz und das mittlere relative Rauschquadrat lassen sich analytisch leichter berechnen, wenn mit größerem  $n$  und  $m$  eine Approximation der BNV durch die einparametrische **Poisson-Verteilung** (POV) möglich wird. Es ist dann:

$$P(m)_{[POV]} = e^{-\mu} * \mu^m / m! \quad \text{„Poisson-Verteilung“} \quad (\text{Gl. III / A2 / 7})$$

Die Varianz lautet hier:

$$V_{[POV]} = \sigma^2_{[POV]} = \mu = p * n \quad (\text{Gl. III / A2 / 8})$$

und für das relative mittlere Rauschquadrat gilt

$$\mathfrak{R}_{[POV]} = 1 / \mu \quad (\text{Gl. III / A2 / 9}),$$

das also bei gegebener Wahrscheinlichkeit  $p$  mit wachsender Zahl  $n$  der „Versuche“ proportional zu  $1/n$  abnimmt.

Dieses Rauschverhalten entspricht dem klassischen „Schrotrauschen“, d.h. dem Fall des Vorliegens einer „Maxwell-Boltzmann-Verteilung“ (MBV). Hier bei Laser-Strahlung (vergl. dazu im Gegensatz weiter unten in Abschnitt III / B 1 die Bose-Einstein-Verteilung, die für die Temperaturstrahlung gilt, und die Fermi-Dirac-Verteilung) ist jedoch kein additiver Term vorhanden, der dem „Wellenrauschen“ infolge der statistischen „Phasenschwankungen“ entspricht. Letztere entfallen beim idealisierten LASER, da es sich aufgrund der stimulierten Emission um eine vollkommen kohärente, also gleichphasige und Phasenkonstante stationäre Strahlungsemission handelt.\*)

Für das sogen. Signal-Rausch-Verhältnis  $Q$ , definiert als

$$Q = \mu / \sqrt{V} \quad (\text{Gl. III / A2 / 10})$$

gilt demnach im idealisierten Fall

$$Q_{[POV]} = \sqrt{\mu} \quad (\text{Gl. III / A2 / 11})$$

Das Signal-Rausch-Verhältnis nimmt also a) bei gegebener „Testzeit“  $\Delta t$  (nur) mit der Wurzel aus der Strahlungsintensität, die ihrerseits proportional ist zur mittleren Photonenrate [vergl. (Gl. III / A2 / 4a)], zu und b) bei gegebener Strahlungsintensität mit der Wurzel aus der „Testzeit“  $\Delta t$  zu. Letzteres zeigt an, daß sich die Wurzel aus dem mittleren Rauschquadrat mit  $(1/\sqrt{\Delta t})$  verringert, weil sich mit wachsendem  $\Delta t$ , also auch mit

---

\* In realen Laser-aktiven Substanzen treten jedoch u. U. stochastische Mechanismen auf, die die Phasenkohärenz im Gesamtvolumen nach einer gewissen Zeit zerstören, so daß die gemeinschaftliche Phase der stimulierten Emission und damit der abgestrahlte Wellenzug endet.

wachsender Trägheit des Detektorsystems, die Schwankungen innerhalb von  $\Delta t$  gegenseitig mehr und mehr kompensieren. – Was hier über die Photonenraten ausgesagt ist, gilt entsprechend für z.B. elektrische Signal- und Rauschströme, wenn in einem photoelektronischen Nachweiskanal pro detektiertem Photon eine elektrische Ladung (meist ein Elektron) freigesetzt wird. Daran ändert sich nichts, wenn die Quantenausbeute größer als Eins ist und/oder eine lineare Verstärkung der primär freigesetzten Ladung stattfindet.

Die „spektrale Dichte“ (= „Spektralverteilung“) der Schwankungen ist „weiß“ bis zum „verschliffenen“ Abfall bei der Kreisfrequenz  $\omega_{\text{Grenz}}$ , wobei  $(2\pi)/\omega_{\text{Grenz}}$  die Zeitkonstante des Nachweissystems ist. Dieser Frequenzgang entspricht dann der Filterung eines ideal weißen Rauschspektrums durch ein RC-Glied mit der diesbezüglichen komplexen Übertragungsfunktion  $\underline{G}(\omega)$  (vergl. oben Abschnitt II C 2).

Für große Photonenraten geht ihrerseits die Poisson-Verteilung in eine Gauß-Verteilung der Photonen-Häufigkeiten innerhalb der Testzeit über, wobei das Maximum dem Mittelwert  $\mu$  entspricht.

**Die Photonenströme bei 1.) „großer“ und 2.) „sehr kleiner“ Intensität der Laser-Strahlung können nun diskutiert werden:**

1.) Bei stationärer Laser-Strahlung, soweit sie ungefiltert bzw. ungestreut ist und deren Intensität so groß ist, daß innerhalb der Sampling-Zeit „viele“ Photonen den Detektor erreichen, ist die Autokorrelations-funktion (AKF) vom ersten Wert für die Verzögerungszeit  $\tau = 0$  an eine Konstante (vergl. [A6]) :

$$\text{AKF}_{\text{Laser-Strahlung}}(\tau) = \text{const} \quad (\text{Gl. III / A2 / 12}) \quad .$$

Dies erklärt sich bei den kohärenten und im Mittel zeitlich konstanten Photonenraten der Laser-Strahlung daraus, daß einerseits die Sinus-Quadrat-Funktion des Poynting-Vektors, d.h. die Zeitfunktion der ankommenden Momentanleistung im Bild der elektromagnetischen Welle ausgedrückt, durch den Autokorrelator zeitlich nicht aufgelöst werden kann. Andererseits und im Photonenbild gesehen wird innerhalb der Sampling-Zeit  $\delta t$  jeweils mit nur geringen statistischen Schwankungen eine gleiche Zahl von Photonen registriert. Die dabei auftretenden geringen Schwankungen sind jedoch statistisch völlig unabhängig, d.h. in ihrer zeitlichen Abfolge absolut unkorreliert. An dieser absolut fehlenden Korrelation ändert die Tatsache nichts, daß die Häufigkeit der Größe der innerhalb der Samplingzeit gemessenen Photonenanzahl beidseitig symmetrisch vom Mittelwert nach einer Gauß-Verteilung abfällt [vergl. dazu die bereits im Abschnitt II / B 3 b) geführte Diskussion].

2.) Bei der Modellierung sehr kleiner Photonenströme der Laser-Strahlung, ein Fall also, bei dem innerhalb der Sampling-Zeit nur ein oder kein Photon registriert wird, ist die Signalgröße dementsprechend entweder immer gleich groß oder Null. Die Modellierung bezieht sich demnach nur auf die korrekte zeitliche Abstandsstatistik der konstanten Signalgröße. Dies verlangt die Kenntnis der „Wartezeiten-Verteilung“ und die Umsetzung dieser Verteilung in eine statistisch unkorrelierte Abfolge der Wartezeiten, die als ganzzahliges Vielfaches der Sampling-Zeit auftreten.

Was die statistische Verteilung der zeitlichen Abstände, hier also der „**Wartezeiten**“  $t_w$ , bei einem Poisson-Prozess angeht, so entspricht diese der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der „Restwahrscheinlichkeit“ (vergl. [12] und [16]). Diese lautet:

$$p_{\text{Rest}}(t_w, \chi) = (1/\chi) * \exp[-t_w / \chi] \quad (\text{Gl. III / A2 / 13})$$

$$\text{mit } \chi = \Delta t / \mu = 1 / r ; \quad \chi > 0 \quad .$$

x entspricht demnach der mittleren Abstandszeit.

Man erhält also mit der mittleren Photonenrate  $r$  für die Wahrscheinlichkeitsdichte (in der Dimension [ 1 / sec ] ) eine reine Exponentialfunktion :

$$p_{\text{Rest}}(t_w, r) = r * \exp[-(t_w * r)] \quad (\text{Gl. III / A2 / 14})$$

Die numerische Berechnung einer statistischen Abfolge ungeordneter Wartezeiten mit dieser Wahrscheinlichkeitsdichte im Computer-Programm basiert auf dem bekannten Verfahren der „Inversion“, d.h. auf der Integration von Gl. III / A2 / 14 und der Umkehrfunktion der erhaltenen Stammfunktion. Der eingebaute Zufallsgenerators liefert die im Intervall 0 bis 1 gleichverteilten Zufallszahlen  $Z$  und man erhält die gesuchte Wartezeit  $t_{w,z}$  mittels der Gleichung:

$$t_{w,z} = (1 / r) * \ln(1 / Z) \quad \text{mit } 0 < Z < 1 \quad (\text{GL. III / A2 / 15}).$$

Die gesuchte Abfolge der Wartezeiten erhält man dann mit Hilfe der sukzessiven Folge der vom Rechner ausgegebenen Zufallszahlen  $Z$ . Die Meßwert-Matrix, die vom Autokorrelator zu verarbeiten ist, enthält sukzessive auf  $(t_{w,z} / \delta t)$  Zeilen den Wert Null und danach in der folgenden Zeile den (festen) Wert  $Y$ . Dann schließt sich die nächste „Wartezeit“ an, usw. - Um die Meßwert-Matrix in „handlicher“ Größe zu halten, erscheint es ebenso ratsam, wie unkritisch, Wartezeiten oberhalb einer angemessen festgesetzten maximalen Wartezeit, die sich an der maximalen Verzögerungszeit des Autokorrelators orientiert, zu ignorieren.

Innerhalb des Abschnitts III / B 1 wird ein numerisches Ergebnis präsentiert, das den anschaulichen Vergleich [ s. Abb. III / B 1 - 2 a) und b) ] zwischen der zeitlichen Abfolge der Wartezeiten bis zum Eintreffen der einzelnen Photonen bei der Laser-Strahlung und bei der Temperaturstrahlung ermöglicht. Dabei bestätigt sich eindrucksvoll der Bunching-Effekt bei Gültigkeit der BE-Statistik und die vergleichsweise gegebene „Regelmäßigkeit“ in der Photonenabfolge bei Gültigkeit der PO-Statistik.

### III A ] 3. Laser-Streustrahlung

Durchdringt Laser-Strahlung Materie, so kann nach Maßgabe der dortigen Absorptionsquerschnitte ein Teil der Strahlung extinguiert werden. In der Regel wird jedoch



auch ein Teil der primären Strahlung gestreut, wobei eine Richtungsänderung und/oder eine Frequenzänderung auftritt. Die (i. allg. relativ sehr kleine) Frequenzänderung bei der Streuung macht sich in einer Verschiebung des Linienmaximums und/oder in einer Linienverbreiterung bzw. Linienformänderung bemerkbar. Ohne Frequenzänderung spricht man von „elastischer“, mit Frequenzänderung von „inelastischer“ Streuung. – Die Streustrahlung mit ihrer relativ kleinen spektralen Variation gegenüber der Primärstrahlung ist in der Regel von einer Photolumineszenzstrahlung gut unterscheidbar, die eventuell in Verbindung mit der Absorption der primären Photonen auftritt.

Die inelastische Streuung wird wie folgt eingeteilt in:

#### *a) Statistische Beeinflussung*

Kleinräumige statistischen Schwankungen der komplexen optischen Dielektrizitätskonstanten (oDK) führen zu einer Verbreiterung der spektralen Intensitätsverteilung der Laser-Spektrallinie. Man spricht dann von **Rayleigh-Streuung**. Ursache der statistischen räumlichen und/oder zeitlichen Schwankungen der oDK können z. B. sein: Dichte- oder Temperaturinhomogenitäten, die Brownsche Molekularbewegung infolge endlicher Temperatur und verwirbelte Strömungsbewegungen bei fließenden Medien. Diese Schwankungen erzeugen eine entsprechende zeitliche Modulation der Amplitude der elektromagnetischen Welle in Verbindung mit Phasenänderungen. Die Schwankungen nehmen längs des Weges der Lichtausbreitung i. allg. mehrfach Einfluß auf die elektromagnetische Welle, man spricht dann von Mehrfachstreuung (zur meßtechnischen Separierung des Einzelstreuprozesses vergl. z.B. [A7]). – Als Folge der Rayleigh-Streuung liegt i. allg. ein sogen. „Gauß'sches Strahlungsfeld“ vor, d.h. die Amplitude  $E_0(t)$  [ und dann auch  $H_0(t)$  ] der resultierenden elektromagnetischen Welle hat eine Gauß-förmige Häufigkeitsverteilung mit Maximum bei dem Mittelwert  $\langle E_0(t) \rangle$  bzw.  $\langle H_0(t) \rangle$  [vergl. dazu weiter unten Abschnitt III / C]. Diese Gauß-Form der Größenverteilung der elektrischen (bzw. auch der magnetischen) Amplitude der Feldstärke ist Voraussetzung zu Anwendung der Siegert-Relation. Sollte kein Gaußsches Strahlungsfeld vorliegen, so kann statt der hier ausschließlich behandelten „Homodyn-Methode“ die „Heterodyn-Methode“ angewandt werden, bei der der gestreuten Strahlung ein (viel größerer !) Teil des primären, d.h. ungestreuten Laserlichtes beigemischt wird (Näheres siehe z.B. in [A2]). –

Die Meßgeometrie bei der homodynen Autokorrelationsmessung ist meist die, daß das Streulicht in einem relativ großen Winkel ( etwa größer als 10 Grad) zur Richtung der Einstrahlung des Primärlichtes gemessen wird. (Zur Diskussion der Streuwinkelabhängigkeiten siehe z.B. [A2]). Untersuchungsziel ist dabei die Feststellung der charakteristischen Abklingzeit der zur Streuung führenden Schwankungen. – Der Versuch wird so durchgeführt (vergl. dazu [A2]), daß die den Detektor erreichende Strahlungsleistung so gering ist, daß die Photonenstatistik der Poisson-Verteilung entspricht.

Im Falle der statistischen zeitlichen Modulation der elektrischen Feldstärke der Laser-Strahlung im Sinne der Rayleigh-Streuung tritt eine Linienverbreiterung auf, wobei deren spektrale Amplitudendichte dann einer Lorentz-Linie entspricht [5]. Deshalb tritt ein für diese Art Streuung signifikanter Anteil in der Autokorrelationsfunktion  $AKF_s^{(1)}$  auf, der exponentiell abfällt (vergl. oben Gl. III / A1 / 12 ). Die darin enthaltene Relaxationszeit ist

gleich dem Reziprokwert der Halbwertsbreite der durch die Streuung verbreiterten Laser-Spektrallinie. \*)

Die theoretisch-analytische Behandlung der Lichtstreuung beim Materie-Durchgang hat an anderer Stelle ([ 2 ] Seite 384 ff.) zu einem etwas anderen Ergebnis geführt, was die durch Streuung verursachte Häufigkeitsverteilung der elektrischen Feldstärke bzw. der Photonenrate angeht. Danach liegt statt der Gauß-Verteilung eine „Log-Normal-Verteilung“ vor, d.h. die Größe  $\chi$ , definiert als

$$\chi = \ln (E_0 / \langle E_0 \rangle) \quad (\text{Gl. III / A 3 / 1})$$

besitzt in ihrer Wahrscheinlichkeitsdichte  $P_\chi(\chi)$  eine Gauß-Verteilung der Form:

$$P_\chi(\chi) = [1/(\sqrt{2\pi}) * \sigma_\chi] * \exp[-(\chi - \langle \chi \rangle)^2 / (2 \sigma_\chi^2)] \quad (\text{Gl. III / A 3 / 2})$$

Daraus ergibt sich mittels Wahrscheinlichkeitstransformation auf die Intensität bzw. Photonenrate bzw. Meßwertgröße  $Y$  die Häufigkeitsverteilung:

$$P_Y(Y) = (\text{const} / Y) * \exp[-\{ [\ln(Y/\langle Y \rangle) + (2 \sigma_\chi^2)]^2 / (8 \sigma_\chi^2) \}] \quad (\text{Gl. III / A 3 / 3})$$

In Abb. III / A 3 - 1 sind die beiden Funktionen [s. Gl. III / C / 2 in Abschnitt III / C und hier Gl. III / A 3 / 3] vergleichend dargestellt, um die Unterschiede zwischen der Gauß-Verteilung und der Log-Normal-Verteilung der Häufigkeit der Amplitude der elektrischen Feldstärke in ihrer Auswirkung auf die Häufigkeitsverteilung der Photonenrate bzw. die Meßwertgröße je Sampling-Zeit zu verdeutlichen. Wenn man nicht gerade auf den relativ kleinen Unterschied fixiert ist, erscheinen jedoch die beiden Häufigkeitsverteilungen in erster Näherung gleichwertig, zumal eine gegebene Häufigkeitsverteilung für sich genommen noch keine Festlegung der zeitlichen Abfolge in der Photonenrate bzw. der Meßwerte und damit auch keine Aussage zu der auftretenden Autokorrelationsfunktion bedeutet.

### **b) Periodische Beeinflussung**

Eine periodische Beeinflussung der Richtung, Amplitude und/oder Phase der elektromagnetischen Welle der Laser-Strahlung führt infolge der *oszillatorischen Modula-*

---

\* In [A2] wird als *Zeitfunktion* der Amplitude der elektrischen Feldstärke nach der stattgefundenen (auch mehrfachen) Rayleigh-Streuung allerdings eine Folge von sich aneinanderreihenden Wellenzügen skizziert, deren Länge und Maximalamplitude statistisch variiert, wobei jedoch die Zeitfunktion der Amplitude innerhalb eines Wellenzuges etwa Gauß-förmig verläuft bei mittigem Maximalwert. Demnach wäre die Zeitfunktion der Einhüllenden  $E_0(t)$  der elektrischen Sinuswelle und damit auch die spektrale Amplitudendichte ebenfalls Gauß-förmig und man würde für die  $AKF_s^{(1)}$  des detektierten Photonenstromes ihrerseits eine Gauß-förmiges Relaxationsverhalten erwarten (vergl. weiter unten).

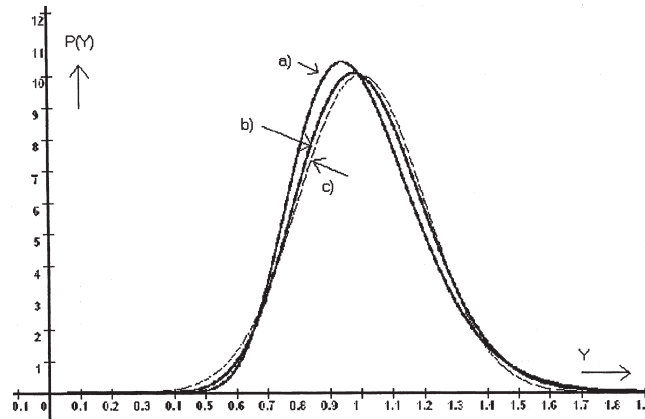


Abb. III / A 3 -1 Graphischer Vergleich zwischen den Häufigkeitsverteilungen  $P(Y)$  der Größe  $Y$  der Meßwerte, wenn die Amplitude der elektrischen Feldstärke besitzt eine a) „Log-Normal-Verteilung“ (L) (vergl. Gl. III / A 2 / 3) b) Gauß-Verteilung (G) (vergl. Gl. III / C / 2) . c) eine exakte Normal-Verteilung (N) für die  $Y$ -Werte. Beigestellt ist Normierung:  $\langle Y \rangle = 1$ ,  $P(Y = \langle Y \rangle) = 10$ ; Relaxationsparameter: bei (G) :  $\vartheta = 0,141$ ; bei (L) :  $\sigma_x = (\vartheta / \sqrt{2})$  ; bei (N) :  $R = 2 \cdot \vartheta$  . – Nähere Erläuterungen dazu s. Text.

tion, z. B. mit der Kreisfrequenz  $\omega_{\text{Modul}}$ , zur einer symmetrischen spektralen Linienaufspaltung in dieser Größe zu kleineren und größeren Frequenzen hin. Zusätzlich ist damit i. allg. auch noch eine Linienverbreiterung verbunden. Erfolgt die oszillatorische Modulation der Lichtwelle mit einem Frequenzgemisch, so führt dies entsprechend zu breiteren „Seitenbändern“. Eine nahezu Gauß-förmige spektrale Amplitudendichte in den Seitenbändern hat dann auch eine quasi-Gauß-förmige Zeitfunktion der Einhüllenden  $E_0(t)$  zur Folge.

Die Feststellung und Analyse solcher Veränderungen in der spektralen Amplitudenverteilung wird bei kleinen Modulationsfrequenzen wiederum mit der Korrelationspektroskopie vorgenommen, wobei allerdings meist eine Kreuzkorrelationsanalyse zwischen dem gestreuten Licht und der primären, ungestreuten Laser-Strahlung eingesetzt wird (vergl. [2] ).

Ursachen der Streuung des Lichtes dieser Art sind in Gasen und Flüssigkeiten die Molekül- und/oder Atomschwingungen. Bei Festkörpern basieren diese unelastischen Wechselwirkungen von Licht mit der Materie vor allen Dingen auf der Anwesenheit der Phononen, also der Gitterschwingungsquanten. Handelt es sich um eine Wechselwirkung zwischen akustischen Phononen und Photonen, so spricht man **Brillouin-Streuung**. Handelt sich um die Wechselwirkung mit optischen Phononen, so wird dies als **Raman-Streuung** bezeichnet. Die analoge Unterscheidung wird in Gasen und Flüssigkeiten getroffen, wenn die Moleküle relativ zueinander schwingen oder sich innerhalb des Moleküls unter Beanspruchung der Bindungskräfte frequenzselektive Anregungen ergeben.

### c) Doppler-Verschiebung

Bei gleichförmig fließenden Medien tritt neben einer Linienverbreiterung i. allg. eine geringfügige Linienverschiebung infolge des Doppler-Effektes auf. Man erwartet dann eine  $AKF^{(1)}_E$ , die eine Sinusfunktion enthält, deren Frequenz gleich ist der Verschiebungsfrequenz (vergl. oben bzw. [A2]). Ist diese Frequenz nicht zu hoch, d.h. in der Größenordnung des Kehrwertes der maximalen Verzögerungszeit des Autokorrelators, so sollte die entsprechende Modulation der  $AKF^{(1)}_S$  in Überlagerung zum dem der Lorentz-Linienbreite entsprechenden exponentiellen Abfall der  $AKF^{(1)}_S$  zu erkennen und auszuwerten sein.

## B ] Breitbandstrahler: Temperaturstrahlung

### 1.) „Schwarzer Körper“

Der Prototyp einer spektral sehr „breit“ ausgedehnten Photonenstrahlung ist die spektral unbegrenzt ausgedehnte Temperaturstrahlung des „Schwarzen Körpers“. Überdies ist dabei die definierte Größe der Spektralen Strahldichte  $S(\nu, \alpha, T)$ , Dimension [ Joule / (m<sup>2</sup> \* sr) ], bei gegebenem Abstrahlungswinkel  $\alpha$  (gemessen von der Flächennormalen aus) theoretisch quantitativ gegeben und analytisch ausgedrückt im Planckschen Strahlungsgesetz in Verbindung mit dem Lambertschen Kosinus-Gesetz:

(Gl. III / B 1 / 1)

$$S(\nu, \alpha, T) = [ (2 \cdot \nu^2) / (c^2 \cdot \Omega_0) ] \cdot h\nu \cdot \{ [\exp(h\nu / kT)] - 1 \}^{-1} \cdot \cos \alpha$$

mit  $T$  = absolute Temperatur,  $\Omega_0 = 1$  [sr],  $c$  = Vakuum-Lichtgeschwindigkeit  
und  $k$  = Boltzmann-Konstante °

Da dem Planck'schen Strahlungsgesetzes die Bose-Einstein-Statistik mit ihrer Bose-Einstein-Verteilung (BEV) für ununterscheidbare Teilchen mit Spin 1 (sogen. „Bosonen“) bei uneingeschränkter Besetzungszahl auf einem Energieniveau zugrunde liegt (vergl. z.B. [17]), zeigt die emittierte Strahlung in ihrer Intensität, bzw. in der am Photonen-zähler registrierten Photonenrate  $r$ , die entsprechenden zeitlichen Schwankungen.

Bei sehr kleinen Photonenraten ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung diskret und für die Wahrscheinlichkeit  $P(n, m)$ , bei  $n$  „Versuchen“  $m$  Photonen zu registrieren, lautet (vergl. damit die Gl. III / A2 / 3 im Falle der BNV):

$$[P(n, m)]_{BEV} = n^m / [(1+n)^{(m+1)}] \equiv [1/(1+n)] \cdot [1/\{(1+1/n)^m\}]$$

(Gl. III / B 1 / 2)

mit  $n$  und  $m$  ganzzahlig ;  $n = \Delta t / \delta t$ .

Für große  $n$  geht die Wahrscheinlichkeitsabhängigkeit  $P(n, m)$  über in die rein exponentielle Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion (vergl. damit die Gl. III / A2 / 7 im Falle der POV):

$$[P(m, \mu)]_{\text{BEV}} = (1/\mu) \exp(-m/\mu) \quad (\text{Gl. III / B 1 / 3})$$

mit  $\mu$  = Mittelwert des Auftretens von günstigen Ereignissen in  $\Delta t$ ;  $m \geq 0$

Für die Varianz  $V_{\text{BEV}}$  ergibt sich damit (vergl. Gl. III / A / 13)

$$V_{\text{BEV}} = (\sigma_{\text{BEV}})^2 = \int_0^{\infty} (m-\mu)^2 * (1/\mu) * \exp(-m/\mu) * dm = \mu + \mu^2 \quad (\text{Gl. III / B 1 / 4}).$$

Das relative mittlere Rauschquadrat  $\mathfrak{R}$  hat entsprechend seiner Definition (vergl. Gl. III A2 / 6) den Wert

$$\mathfrak{R}_{\text{BEV}} = 1/\mu + 1 \quad (\text{Gl. III / B 1 / 5})$$

Es ist damit um den Summanden Eins größer als bei der Maxwell-Boltzmann-Verteilung und bei der Poisson-Verteilung. Während der Summand  $1/\mu$  auch hier in der BEV das Schrotrauschen widerspiegelt, ist der zweite Summand Eins durch das zusätzliche „Wellenrauschen“, d.h. durch die statistischen Phasenschwankungen der Wellenzüge des Lichtes bei der Temperaturstrahlung (und dabei fehlender Besetzungsinversion der Niveaus) bedingt. Hierin kommt indirekt auch zum Ausdruck, daß sich, statistisch schwankend, der dominierenden spontanen Photonenemission durch Rücksprung über die Energiedistanz  $h\nu$  noch zusätzlich Prozesse mit stimulierter Emission eines Photons überlagern.

Da die normierte Spektralverteilung  $\mu'(h\nu)$  des Mittelwertes  $\mu(h\nu)$  der in  $\Delta t$  gemessenen Zahl der Photonen der Photonenenergie ( $h\nu$ ) der sogen. Planck'schen Verteilung (s. dazu [17]) folgt:

$$[\mu'(h\nu)]_{\text{Temp.strahlung Schwarzer Körper}} = 1/[\exp(h\nu/kT) - 1] \quad (\text{Gl. III / B 1 / 6}),$$

läßt sich daraus ebenfalls die Varianz der BEV ableiten und es gilt in anderer Formulierung:

$$V_{\text{BEV}} = [\sigma^2]_{\text{BEV}} = -kT * \partial [\mu'(h\nu)] / \partial (h\nu) \quad (\text{Gl. III / B 1 / 7})$$

Die Spektralverteilung des Rauschens ist auch hier „weiß“ mit einem abgerundeten Abfall bei  $\omega_{\text{Grenz}}$ , wie bei der Laser-Strahlung. Die die obere Grenzfrequenz bestimmende Relaxationszeit ist dabei praktisch stets „apparativ bedingt“, d.h. durch das Trägheitsverhalten des Photonen-Nachweiskanal gegeben, denn die Quanten-Grenzfrequenz  $\nu_{\text{Quantengrenze}} = kT/h$  liegt in der Regel doch sehr viel höher.

Nach dem Wiener-Satz lautet die Autokorrelationsfunktion  $\text{AKF}_s^{(1)}$  wie oben bei der Tiefpaßfilterung des Weißen Rauschens (s. Gl. II / C 2 / 7) dann:

$$\text{AKF}_s^{(1)}(\tau; \text{Temp.Strahlung}; \omega_{\text{Grenz}}) = \text{const} + \text{const} * \exp[-\tau/(RC)] \quad (\text{Gl. III / B 1 / 8})$$

mit  $\tau \geq 0$  = Verzögerungszeit im Autokorrelator  
und  $RC$  = Zeitkonstante des Detektorsystems.

Bei der Modellierung entsprechender Photonenströme kann man die Tatsache ausnutzen, daß mit Gültigkeit der Gl. III / B 1 / 3 auch die in der Samplingzeit gemessene Photonenanzahl bzw. die Größe des in dieser Zeit auftretenden Meßwertes  $Y$  eine funktional gleiche Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion besitzt:

$$[P(Y)]_{\text{Temp.strahlung}} = (1/\langle Y \rangle) \exp[-(Y/\langle Y \rangle)] \quad (\text{Gl. III / B 1 / 9})$$

Es sei an dieser Stelle der **Hinweis** erlaubt, daß bei Gültigkeit der **Fermi-Dirac-Verteilung (FDV)** für das mittlere Rauschquadrat gilt (vergl. dazu z.B. [ 5 ]):

$$\mathfrak{R}_{\text{FDV}} = (1/\mu) - 1 \quad (\text{Gl. III / B 1 / 10})$$

Zur Begründung der Vorzeichenänderung des konstanten Summanden ist zu erläutern, daß bei Gültigkeit der FDV

$$[\mu(h\nu_M)]_{\text{FDV}} = 1 / \{ \exp[(h\nu_M - \zeta) / (k \cdot T) + 1] \} \quad (\text{Gl. III / B 1 / 11})$$

mit  $\zeta$  = chemisches Potential und  $h\nu_M$  = Quantenenergie der „Fermionen“

wegen des Ausschließungsprinzips  $\mu$  maximal den Wert Eins annehmen kann, d.h. jeder Quantenzustand kann nur von einem Fermion besetzt werden oder bleibt leer. Ist der Zustand statistisch gesehen „besetzt“, so kann es in der Besetzungszahl keine Fluktuationen mehr geben und das Rauschen fällt aus.

Abschließend sei noch wie bei der Laser-Strahlung der **Fall relativ sehr kleiner Strahlungsleistungen von Temperaturstrahlung** betrachtet, bei dem auch hier „Wartezeiten“ zwischen dem Eintreffen bzw. registrieren der einzelnen Photonen auftreten. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Wartezeiten  $t_w$  hat hier jedoch eine andere funktionale Abhängigkeit. Es gilt (vergl. [18]):

$$P(t_w, \lambda)_{\text{BEV}} = \lambda * [1/(\lambda * t_w + 1)] \quad \text{mit } \lambda = \mu / \Delta t \quad (\text{Gl. III / B 1 / 12})$$

Daraus ergibt sich die auf den Wertebereich  $0 < Z < 1$  bezogene Umkehrfunktion

$$(t_w)_{\text{BEV}} = (1/\lambda) * [(1/Z) - 1] \quad (\text{Gl. III / B 1 / 13})$$

Zur Berechnung einer statistischen Abfolge von Wartezeiten wird wieder für  $Z$  sukzessive die im Intervall gleichmäßig verteilte, im Computer generierte Zufallszahl  $Z$  eingesetzt.

Die Abb. III / B 1 - 1 zeigt im Vergleich die beiden qualitativ unterschiedlich verlaufenden Verteilungsdichten. Abb. III / B 1 - 2 stellt die beiden daraus abgeleiteten unterschiedlichen Abfolgen der Wartezeiten  $t_w$  im Fall a) der Poisson-Verteilung für Laser-Strahlung und b) für die Schwarze Temperaturstrahlung, und zwar als Beispiel je mit dem Parameter  $\lambda=0,2$ , dar. Bei der Temperaturstrahlung liegt eine  $(1/t_w)$ -Verteilung und bei der Laser-Strahlung eine exponentielle Verteilung vor. Bei der Temperaturstrahlung sind damit die kurzen

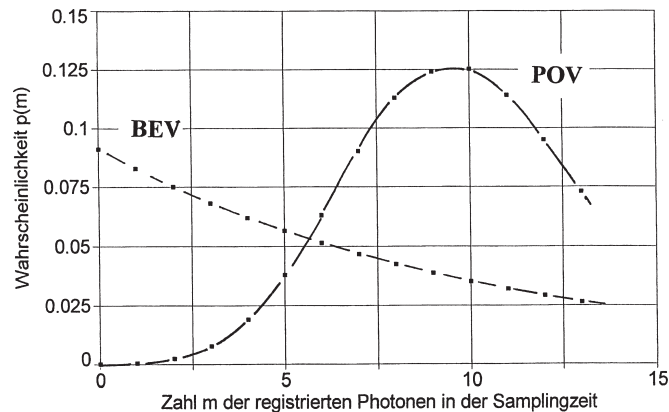


Abb. III / B 1-1 Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(m)$ , innerhalb der Samplingzeit  $m$  Photonen zu registrieren:

Kurve „POV“ für die Poisson-Verteilung bei der Laser-Strahlung,

Kurve „BEV“ für die Bose-Einstein-Verteilung bei der Temperaturstrahlung.

Wartezeiten deutlich wahrscheinlicher, als bei der Laserstrahlung. Diese Relation läßt sich aus der graphischen Darstellung der Abfolge der Wartezeiten, deren Größe ist als Ordinate aufgetragen, zwischen dem Eintreffen der einzelnen Photonen im Vergleich zwischen den Teilbildern a) und b) deutlich erkennen. Dieser Häufungseffekt kleiner(!) Photonenabstände bei der Temperaturstrahlung wird auch als „bunching“ (= „Bündelung“) bezeichnet. – Man kann also bei einer Einzel-Photonen-Detektion anhand der registrierten Wartezeitenverteilung bereits erkennen, ob eine zunächst unbekannte Strahlung von einem Laser als Lichtquelle stammt oder von einem thermischen Strahler emittiert wurde.

## 2.) Gefilterte Temperaturstrahlung

Besitzt der als „Lichtquelle“ dienende Temperaturstrahler im gesamten Spektralbereich nicht den Emissionsgrad Eins, durchsetzt die abgegebene Temperaturstrahlung Materie, einen selektiv transmittierenden optischen „Apparat“ (z. B. ein Spektrometer oder ein Absorptionsfilter) und/oder liegt eine optische Streuung bzw. Interferenzerscheinung vor, so entspricht die den Detektor erreichende Strahlung in der Spektralverteilung ihres Mittelwertes  $\mu(h\nu)$  nicht mehr dem Planckschen Strahlungsgesetz. Hinzu kommen die spektralen Veränderungen bzw. Selektivitäten bei der Meßwertaufnahme aus der originären Photonenrate durch das Detektorsystem selbst, z. B. aufgrund einer, i. allg. unvermeidlichen spektralen Abhängigkeit der Photonenregistrierung von der Photonen-Quantenenergie. Alle diese Einflüsse führen zu einer modifizierten Autokorrelationsfunktion. Unvermeidlich erscheinen wohl eine obere und eine untere spektrale Grenzfrequenz. Eine besonders Gewicht haben ferner insbesondere die spektralen Einflüsse im Bereich um das Wien'sche Emissionsmaximum der Schwarzen Temperaturstrahlung.

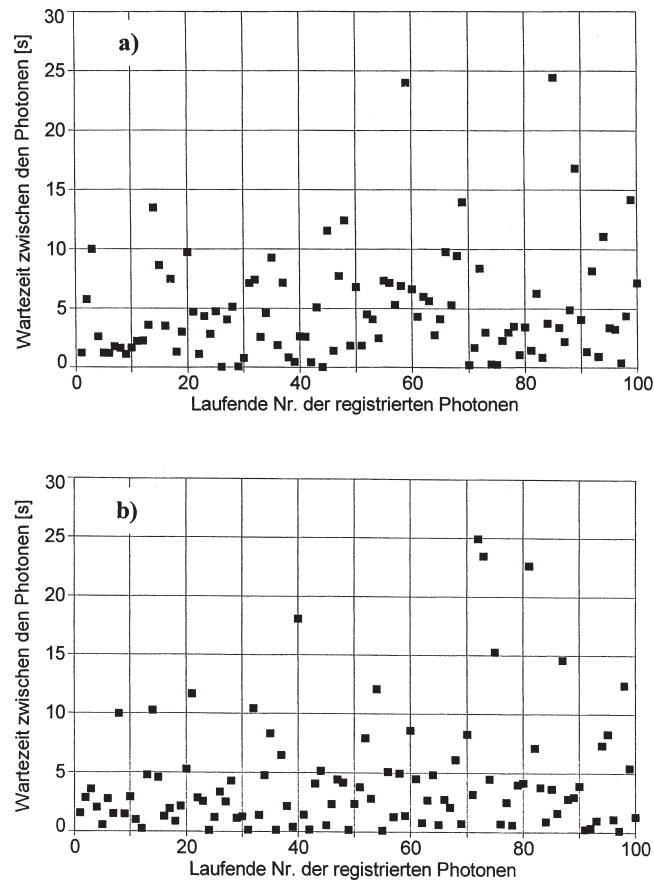


Abb. III / B 1 - 2 Abfolge der Wartezeiten zwischen zwei Photonen bei einer mittleren Photonenrate von 5 Photonen pro Sekunde. In der Darstellung sind die vergleichsweise sehr selten auftretenden Wartezeiten über 25 Sekunden eliminiert, um die Diagrammhöhe zu beschränken.

Bild a) für die Poisson-Statistik bei der Laser-Strahlung,

b) für die Bose-Einstein-Statistik bei der Temperaturstrahlung.

[Die vergleichsweise häufigeren *kleinen* Wartezeiten im Fall b) ergeben einen signifikanten „Bunching-Effekt“.]

Eine Modellierung solcher Verhältnisse, die wegen der großen spektralen Breite der Temperaturstrahlung relativ aufwendig ist, kann unter Zugrundelegung der Spektralverteilung der Schwarzen Temperaturstrahlung durch Multiplikation mit einer resultierenden Spektralfunktion, die alle relevanten Selektivitäten der genannten spektralen Beeinflussungen berücksichtigt, erfolgen. Aus der resultierenden spektralen Strahlungsflußdichte



läßt sich dann nach den oben bereits diskutierten Methoden eine hypothetische Meßwertabfolge gewinnen und dem Autokorrelator zuführen. Alternativ läßt sich aber auch, wie oben bereits ausgeführt, mittels der Methoden der „digitalen Filterung“ aus der Abfolge der zunächst aus dem Planckschen Strahlungsgesetz berechneten primären „Meßwerte“ eine den spektralen Modifikationen entsprechende Veränderung der Größe der modellierten Meßwerte in der gegebenen primären Abfolge erreichen. – Nach den in Kapitel II / A gegebenen Theoremen läßt sich u. U. sogar dann auch die erwartete AKF der modellierten Meßwertabfolge direkt berechnen. – Derartige Rechnungen wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht ins Auge gefaßt.

### III C ] Gaußsches Strahlungsfeld

Die Gültigkeit der Siegert-Relation (s. Abschnitt II A2 ) hat zur Voraussetzung, daß es sich bei den detektierten elektromagnetischen Wellen um ein sogen. „Gaußsches Strahlungsfeld“, man findet dafür zuweilen auch den Ausdruck „Gaußlicht“, handelt. Darunter ist zunächst ein Strahlungsfeld zu verstehen, bei dem die elektrischen Feldstärke einer im langfristigen Mittel stationären quasi-monochromatischen Welle in der Amplitude statistische Schwankungen aufweist, die definitionsgemäß in ihrer Häufigkeit um den Mittelwert  $\langle E_0 \rangle$  Gauß-verteilt sind. D.h. es gilt dabei für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

(Gl. III / C / 1)

$$P(E_0, \langle E_0 \rangle, \vartheta)_{\text{Gaußlicht}} = \text{const} * \exp [ - ( E_0 - \langle E_0 \rangle )^2 / \vartheta^2 ]$$

Da die Zahl der in der Sampling-Zeit registrierten Photonen im Wellenbild des Lichtes proportional ist zur Intensität der elektromagnetischen Welle und diese wiederum proportional ist zum Quadrat der Amplitude der elektrischen Feldstärke  $E_0(t)$ , gilt bei vorliegendem Gaußlicht für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Photonenrate bzw. der ermittelten Meßwerte  $Y$  in der gegebenen Sampling-Zeit :

$$P(Y, \langle Y \rangle, \vartheta)_{\text{Gaußlicht}} = \text{const} * (1 / \sqrt{Y}) * \exp [ - ( Y + \langle Y \rangle - 2 \sqrt{Y * \langle Y \rangle} ) / \vartheta^2 ]$$

(Gl. III / C / 2)

Man erhält diese Beziehung durch die Wahrscheinlichkeitstransformation von  $E_0$  auf  $(E_0)^2$  bzw. auf die Photonenrate und damit auf die Meßgröße  $Y$ . Diese Funktion entspricht einer geringfügig modifizierten Gauß-Verteilung, d.h. der Maximalwert ist nur etwas von  $\langle Y \rangle$  zu kleineren  $Y$ -Werten hin verschoben und die Funktion verläuft links und rechts vom Maximum etwas unsymmetrisch. Immerhin könnte, bei geeigneten Parametern und in der Nähe des Maximums, die reine Gauß-Verteilung für die  $Y$ -Werte noch als Näherung für die durch Gl. III / C / 2 gegebene funktionale Abhängigkeit akzeptiert werden [ vergl. dazu Abb. III / A 3 - 1 in Abschnitt III / A 3 , in der auch eine exakte Gauß-Funktion zum Vergleich eingezeichnet ist.].

Die gegebene Häufigkeitsverteilung macht aber noch keine eindeutige Aussage über die vorliegende Zeitfunktion der elektrischen Feldstärke bzw. über die spektrale Amplitudendichte.

Vom physikalisch realen Geschehen her gesehen liegt z. B. bei der Rayleigh-Streuung von Laser-Strahlung, die dabei ein Medium mit statistisch und kleinräumig inhomogenen optischen Eigenschaften ohne Absorption passiert, ein derartiges Gaußsches Strahlungsfeld vor [A2] und die verbreiterte Spektralverteilung gleicht der einer Lorentz-Linie [vergl. dazu oben Abschnitt III / A 3]. Bei der Modellierung von entsprechenden Photonenströmen hat man also sowohl der dieser Spektralfunktion zugeordneten Zeitfunktion, eine exponentiell gedämpfte Sinusschwingung, als auch der obigen Häufigkeitsverteilung Rechnung zu tragen. In diesem Sinne sind bei der Modellierung der entsprechenden Photonenströme, bzw. der zugehörigen Autokorrelationsfunktionen, die relevanten Modellfunktionen und in ihnen die Parameter mit einer entsprechend spezifischen statistischen Variation anzusetzen. – Mit diesen Modellvarianten und -analysen befaßt sich der folgende Abschnitt IV.

#### IV Autokorrelationsanalyse modellierter Photonenströme

Da eine rein statistische und in sich völlig unkorrelierte Zeitabhängigkeit des stationären Photonenstromes einem Weißen Rauschen entspricht und die daraus sukzessive in der Sampling-Zeit  $\delta t$  entnommenen „Meßwerte“  $Y(t, \delta t)$  bis auf die  $\delta$ -Funktion bei  $\tau = 0$  nur eine praktisch konstant verlaufende Autokorrelationsfunktion (AKF) für den detektierten Photonenstrom  $AKF_s^{(1)}$  mit dem Wert  $AKF_s^{(1)}(\tau \neq 0) = (\langle Y \rangle)^2$  liefert, ist eine charakteristische  $AKF_s^{(1)}$  nur dann gegeben, wenn der im längerfristigen Mittel stationäre Photonenstrom wenigstens zeitweise und dann in adäquater Wiederholung in sich einen Zeitverlauf zeigt, der einerseits die Spektralverteilung und andererseits auch die Häufigkeitsverteilung der Lichtwellenamplitude widerspiegelt. Die daraus resultierenden charakteristischen „Zeitformen“ in der Photonenabfolge lassen sich dann entweder als eine Aneinanderreihung von Photonen-„Pulks“ (mit oder ohne zeitlichen Abstand) oder als eine statistisch korrelierte Modulation des Photonenstromes symmetrisch zu seinem Mittelwert bezeichnen.

Die Modellierung einiger Photonenströme mit charakteristischen Pulk-Zeitfunktionen wird im Kapitel IV A vorgestellt. Dazu werden die Konzeption und das Rechenkalkül zur Gewinnung der entsprechenden Modell-Meßwerte, deren Häufigkeitsverteilung und die resultierende  $AKF_s^{(1)}$  angegeben. Die zur Modellierung ausgewählten Pulk-Zeitformen sind zunächst die Exponentialfunktion und die Gauß-Funktion, weil diese als Grundformen der Modulation des Photonenstromes aufgrund der Emissions- und Wechselwirkungsmechanismen von Licht erwartet werden. Es werden dann aber auch Photonen-Pulks konstruiert, bei denen die Häufigkeitsverteilung der Meßwerte vorgegeben ist und die „erfüllende Zeitfunktion“ entsprechend konstruiert wird. Damit wird gewissermaßen eine andere Sichtweise auf die Zeitfunktion von Photonenströmen geöffnet ohne Rücksicht auf die Frage zu nehmen, ob derartige Zeitfunktionen realerweise existieren.

Nach den Modellen für Photonen-Pulks im Teil IV A folgen im Teil IV B Modelle für die zeitlichen Schwankungen des Mittelwertes relativ großer Photonenströme, bei denen die Einzelereignisse der Photonenankunft nicht mehr aufgelöst werden können. Einem Photonen-Gleichstrom werden also in der Zeitform charakteristischen Schwankungen überlagert. Die Schwankungen sind dabei statistisch symmetrisch positiv bzw. negativ zum Mittelwert und umfassen exponentielle, Gauß-förmige und statistisch rauschende Zeitfunktionen. In letzterem Fall ist das Rauschspektrum durch unterschiedliche Filterfunktionen bestimmt, die durch „Glättung“ und/oder durch die Einfügung von Zwischenwerten entstehen, die über entsprechende Spline-Funktionen aus primär statistischen, d.h. völlig unkorrelierten Meßwerten gebildet werden.

Graphische Darstellungen dienen jeweils der Veranschaulichung der Resultate, die außerdem in kurzer Form diskutiert werden, um dann auch eine „Einschätzung“ des Modellansatzes geben zu können.

#### IV A ] Photonen-„Pulks“

##### 1. Exponential-Zeitform

Als Zeitfunktion bei der Modellierung eines Photonenstromes ist zunächst in Anlehnung an die klassische Vorstellung, daß die elektromagnetische Lichtwelle von einem gedämpften (Dipol-) Oszillator abgestrahlt wird (vergl. dazu oben die Ausführungen zum „Lorentz-Oszillator in Abschnitt III / A 1), eine abklingende „Exponentialform“ für die Abfolge der „Meßwerte“ innerhalb eines Photonen-Pulks gewählt worden. Dabei ist also, vergl. die oben geführte Diskussion, über die mit der doppelten optischen Frequenz erfolgende Oszillation des Poyntingvektors bereits gemittelt. Die Abfolge der „Meßwerte“  $Y = [\text{in dem Sampling-Zeitintervall } \delta t \text{ registrierte Photonenanzahl}]$  wird demnach hier für den Modellfall mittels der Funktion berechnet:

$$Y(Q) = Y_0 * \exp(-Q * \delta t / R) ; \quad 0 \leq Q \leq P_L \quad (\text{Gl. IV / A 1 / 1})$$

mit „ $P_L$ “ = ganzzahlig; Pulslänge in Schrittzahl, Einheit [ 1 ]

Um den statistischen Schwankungen des Zeitpunktes der Pulk-Emission bei der Quanten-Anregung des Oszillators Rechnung zu tragen, wird die Pulklänge „ $P_L$ “ statistisch gleichverteilt in einem geeignet gewählten Intervall variiert.

Der Parameter  $Y_0$  der Exponentialfunktion erfährt eine statistische Gauß-Verteilung um den Maximalwert  $Y_{0,m}$ . - Die Gauß-Verteilung wird dabei im Rechenprogramm mit Hilfe der im Anhang AH2 dargestellten Näherungsdarstellung realisiert.

Der Dämpfungsparameter  $R$  der Exponentialfunktion ist in allen Pulks gleich groß und entspricht damit einem charakteristischen Parameter des Oszillators bzw. der spektralen Amplitudendichte der emittierten Strahlung, z.B. in der Form einer Lorentz-Linie, einer quasi-monochromatischen Lichtquelle. Das Variationsintervall der Pulklänge und der Dämpfungs-

parameter  $R$  stehen dabei zunächst in einer Relation so, daß die einzelnen Photonen-Exponential-Pulks im wesentlichen zeitlich isoliert erscheinen (vergl. z.B. die Meßwert-Abfolge in dem in Abb. IV / A 1 / 1a wiedergegebenen Zeitausschnitt).

Bei dem „isolierten“ Auftreten der einzelnen Exponentialpuls entspricht die Häufigkeitsverteilung der Größe der Meßwerte dem Kehrwerte der Ableitung einer Exponentialfunktion, ist also selbst eine Exponentialfunktion. Die in Abb. IV / A 1 / 1a wiedergegebene „empirische“ Häufigkeitsverteilung, die im Rechenprogramm aus der Gesamtheit der auftretenden  $Y$ -Werte berechnet wird, bestätigt dies. Für diesen Modellfall mit den angegebenen Parametern ist in Abb. IV / A 1 / 1b die zugehörige  $AKF^{(1)}_s(\tau)$  wiedergegeben. Diese AKF läßt sich analytisch näherungsweise darstellen durch die folgende Funktion (mit  $\tau =$  „Verzögerungszeit“  $\geq 0$ ), die drei Summanden enthält :

$$[AKF^{(1)}_s(\tau)]_{\text{Expo-Form}} = C_1 + C_2 * \exp(-\tau / \vartheta_2) + C_3 * \exp(-\tau / \vartheta_3) * \cos(2\pi * \tau / \Delta\tau) \quad (\text{Gl. IV / A 1 / 2})$$

Die AKF relaxiert also im Fall der Exponentialform der Photonenpuls vom Wert  $(C_1 + C_2 + C_3)$  auf den Wert  $C_1$ .  $C_1$  ist dabei das Quadrat des Mittelwertes der „Meßwerte“ und  $(C_1 + C_2 + C_3)$  entspricht dem Mittelwert des Quadrates der Meßwerte. Diesem exponentiellen Abklingen ist eine quasi-periodische und ihrerseits gedämpfte Oszillation überlagert, die im ersten Teil der AKF näherungsweise als exponentiell gedämpfte Kosinus-Funktion mit der Periodenlänge  $\Delta\tau$  beschrieben werden kann.

Die maximale Amplitude  $C_3$  des gedämpften Oszillationsanteils in der  $AKF^{(1)}_s(\tau)$  und deren Periodendauer  $\Delta\tau$  stehen mit dem mittleren Abstand der Pulks und damit mit dem gewählten Variationsintervall der Pulklänge und mit dem Variationsbereich der Pulkhöhe  $Y_0$  in Zusammenhang. Diese Oszillation ist nämlich Ausdruck einer trotz der vorhandenen statistischen Variation beider Größen verbliebenen Quasi-Periodizität in der Puls-Abfolge. Es sei dazu bemerkt, daß diese relativ schwache und relativ rasch abklingende Oszillation in der  $AKF^{(1)}_s(\tau)$  infolge der dann besseren Mittelungsqualität grundsätzlich noch weiter reduziert wird, wenn a) die Variationsintervalle von Pulklänge und Puls-Maximalwert sowie b) die Zahl der in die Analyse einbezogenen Meßwerte, also die „Dauer“ der Autokorrelationsanalyse, wesentlich vergrößert werden.

Insgesamt kann man sagen, daß sich im Rahmen dieser Modelldarstellung der Photonenrate für die Abstrahlung eines Lorentz-Oszillators eine Häufigkeitsverteilung der Meßwerte und eine  $AKF^{(1)}_s(\tau)$  ergeben, die den theoretischen Erwartungen entsprechen. Aus der Anpassung der  $AKF^{(1)}_s(\tau)$  mittels Gl. IV / A 1 / 2 läßt sich im Sinne der Zielsetzung der Autokorrelationsspektroskopie insbesondere der Dämpfungsparameter des hypothetischen Lorentz-Oszillators bzw. seine spektrale Halbwertsbreite, in Gl. IV / A 1 / 2 also die Größe  $\vartheta_2$ , bestimmen.

Da auch bei der **Rayleigh-Streuung von Laser-Strahlung** (s. Abschnitt III / A 3) eine spektrale Amplitudendichte auftritt, die einer Lorentz-Linie entspricht und damit zu einer Exponential-Zeitform der elektrischen Feldstärke führt, dabei jedoch i. allg. ein statistisches „Gaußsches Strahlungsfeld“ entsteht (s. Abschnitt III / C), wurde das „Exponentialmodell“ insofern in einer zweiten Variante ausgeführt, als eine stärkere Überlappung der Exponen-

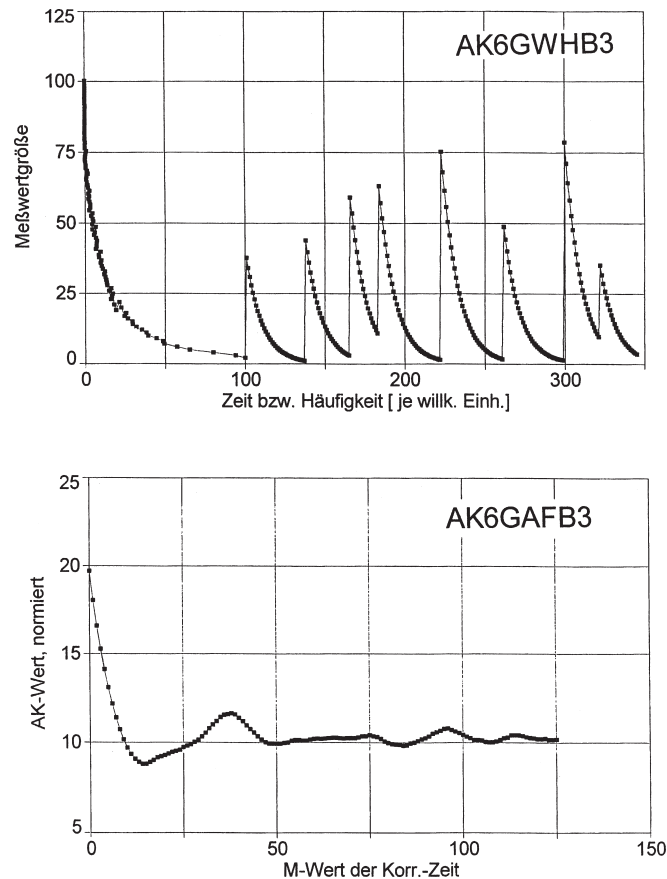


Abb. IV / A 1 - 1 Photonenstrom-Modell: Exponentialzeitform, „isolierte“ Pulks  
 a) (oben)\* zeitliche Abfolge der Meßwerte (Zeitausschnitt) und Häufigkeitsverteilung der Gesamtheit der Meßwert-Größen,  
 b) (unten) Autokorrelationsfunktion (AKF)  
 [ Pulk-Parameter: Pulslänge (15 bis 45) \*  $\delta t$ ;  $R=2 * \delta t$ ;  
 $Y_{0,m} = 10$ ;  $RF=2$ ; Grenzwerte:  $Y_{G1} = 1$ ,  $Y_{G2} = 20$ ; Pulk-Zahl = 200 ]

\* In dieser und den folgenden analogen Abbildungen enthält das obere Bild a) zwei Darstellungen: Die Ordinate ist die (gemeinsame) Meßwert-Größe. Die Abzisse hat von Null bis 100 die Bedeutung der Häufigkeit der Meßwert-Größe in der Gesamtheit der zur AKF führenden Meßwerte ( das dabei auftretende Maximum ist normiert auf den Wert 100 ). Von 100 bis zum Ende ist die Abzisse eine Zeitachse und für das gegebene Zeitintervall ist die konkrete Abfolge der Meßwerte in ihrer Größe aufgetragen.

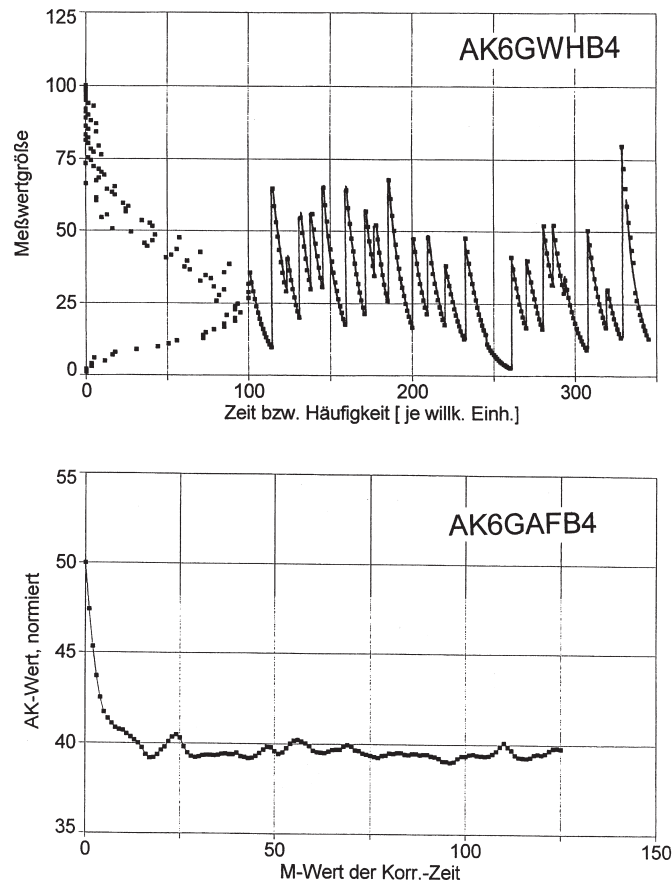


Abb. IV / A 1 - 2 Photonenstrom-Modell: Exponentialzeitform, „verkürzte“ Pulklänge  
 a) (oben) Zeitliche Abfolge der Meßwerte (Zeitausschnitt) und Häufigkeitsverteilung der Gesamtheit der Meßwert-Größen,

b) (unten) Autokorrelationsfunktion (AKF)

[Die Pulk-Parameter entsprechen denen der Abb. IV / A 1 - 1, jedoch sind die Pulslängen gleichverteilt in dem *reduzierten* Intervall  $(5 \text{ bis } 15) \cdot \delta t$  ] .

tial-Pulks eingeführt wurde. Damit werden die Häufigkeiten für die kleineren Größen der Y-Werte drastisch reduziert und zugleich wirkt sich die Gaußverteilung des  $Y_0$  - Parameters stärker aus. Um dies zu erreichen, wurde lediglich die Relation zwischen Pulklänge und Dämpfungsparameter R entsprechend verändert. Die Abb. IV / A 1 / 2a zeigt diese Meßwertabfolge für einen Beispielfall.

Die konkret auf diese Weise erzielte „empirisch“ ermittelte Häufigkeitsverteilung (s. Abb. IV / A 1 / 2a) entspricht, natürlich im Zusammenwirken mit den jeweils auftretenden

Individual-Parametern des Exponential-Pulks selbst, nun erwartungsgemäß einer, hier allerdings noch deutlich „unsymmetrischen“, Gauß-Verteilung.

Die Abb. IV / A 1 / 2b zeigt die in diesem Modellfall, der in etwa einer „Rayleigh-Linie“ entspricht, gewonnene  $AKF^{(1)}_s(\tau)$ . Der Verlauf der AKF entspricht im Grundverhalten, d.h. qualitativ, der in Abb. IV / A 1 / 1b gezeigten AKF für die „reine Lorentz-Linie“, obwohl hier eine andere Häufigkeitsverteilung zugrunde liegt. Die Interpretation bzw. die Diskussion der in der AKF enthaltenen Komponenten ist demnach analog durchzuführen.

**Insgesamt** kann man sagen, daß die im Modell gewählten Exponential-Zeitformen der Meßwerte bzw. der Photonenrate und deren je spezifische Häufigkeitsverteilungen in befriedigender Weise einerseits einer Lorentz-Linie und andererseits einer Rayleigh-Linie, letztere in Verbindung mit einem statistischen Gaußschen Strahlungsfeld, entsprechen.

Im Sinne der Inversionsfrage muß jedoch bemerkt werden, daß der Rückschluß nicht nur zweideutig ist in Bezug auf die beiden genannten Linienformen im spektralen Angebot, sondern daß vergleichbare Autokorrelationsfunktionen auch mit noch anderen Zeitformen des Photonenstromes bzw. der Abfolge der Meßwerte auftreten (s. weiter unten). Insofern ist ein Rückschluß aus der AKF nicht eindeutig.

#### IV A ] 2.) Gauß-Zeit-Form

Zur Modellierung der Meßwertabfolge wird eine „Gauß-förmige“ Zeitfunktion für die Pulk-Form in Ansatz gebracht, so daß für die diskreten „Meßwerte“ gilt:

$$Y(Q) = Y_0 \cdot \exp\{ -[(Q_{\max}/2) - Q]^2 \cdot \delta t / R^2 \} ; \quad Q = 0, 1, 2, \dots, Q_{\max} \quad (\text{Gl. IV / A 2 / 1})$$

Die zeitliche Pulk-Länge beträgt also  $P_L = Q_{\max} \cdot \delta t$ , der Pulk enthält damit insgesamt  $(Q_{\max} + 1)$  Meßwerte und erreicht sein Maximum bei  $(Q_{\max}/2)$ . Die Relation  $(Q_{\max}/R)$  ist dabei so gewählt, daß die Werte  $Y(Q)$  an den „Rändern“ des Pulks bereits auf etwa 1% abgesunken sind, d.h. der Exponent beträgt dort etwa  $(-5)$ . Damit wird einerseits ein fast vollständiges Absinken der Photonenrate auf einen Wert nahe Null an den Rändern erreicht und andererseits das Auftreten von Pausen zwischen den Pulks vermieden. Pausen können allerdings mittels eines gesonderten Programnteils nach jedem Pulk noch getrennt durch programmierte „Nullwertfolgen“ statistisch variierender Länge angehängt werden. Der Wert für  $\delta t$  wird, unschädlich für die Modellierung, auch hier gleich Eins gesetzt, so daß jeder Schleifendurchlauf einem Zeitschritt entspricht.

Die Parameter  $Y_0$ ,  $Q_{\max}$  und  $R$  können unabhängig voneinander mit vorgegebenen Häufigkeitsverteilungen statistisch variiert werden. In Fall der folgenden Beispiele variiert der Maximalwert  $Y_0$  eines Pulks statistisch Gauß-förmig um den Mittelwert  $Y_{0,\max} = 10$  und der Relaxationsparameter  $R$  variiert statistisch gleichverteilt mit  $2 < R < 10$ .

Neben der Variation dieser Parameter bzw. Parameter-Intervalle lassen sich mit dieser Zeitfunktion der Meßwertabfolge noch grundsätzlich andere Häufigkeitsverteilungen der Meßwertgrößen und damit unterschiedliche Autokorrelationsfunktionen  $AKF^{(1)}_s$  erzeugen,

und zwar durch einmalige oder mehrfache **Überlagerung einer primären Meßwertserie mit sich selbst nach einem „geeigneten“ Zeitversatz**. Damit kann einerseits die statistische Überlagerung von Photonenraten simuliert werden, wie sie etwa bei der unkorrelierten Emission aus einem Ensemble von Atomen oder bei der mehrfachen Lichtstreuung bei Durchgang durch Materie auftritt. Der Zeitversatz kann dabei andererseits so passend gewählt werden, daß gewisse Quasi-Periodizitäten, wie sie bei der statistischen Variation der Parameter innerhalb eines begrenzten Wertebereiches u. U. in der primären Meßwertserie auftreten, „ausgebügelt“ werden, indem der Zeitversatz etwa halb so groß wie die (dominierend erscheinende) Quasi-Periodendauer gewählt wird.

Diese Überlagerung von Gauß-förmigen Pulks führt ferner zu einer Anhebung des Mittelwertes der Photonenrate zugleich unter Veränderung der Form und des Maximalwertes der Häufigkeitsverteilung der Meßwerte. Dabei wird insbesondere die Häufigkeit kleiner Meßwerte abgebaut. Mit steigender Zahl der Überlagerungen reduziert sich auch der Wert der maximalen auftretenden Häufigkeit und die Gaußverteilung verengt sich um den Mittelwert, d. h. die Meßwerte gruppieren sich statistisch gesehen enger um den Mittelwert und weichen weniger von ihm ab. – Diese „Überlagerungstechnik“ bei der Modellierung von Photoströmen ist natürlich nicht auf die primäre Form der Gauß-Zeitform beschränkt. \*)

Die folgenden Abbildungen IV / A 2 / 1 bis 3 zeigen für drei signifikante Modellfälle die Ergebnisse für 0, 3 und 6 Überlagerungen bei sonst gleichem Parametersatz, um den Veränderungstrend anschaulich erscheinen zu lassen.

Die  $AKF^{(1)}_s$  kann in allen drei Fällen wieder näherungsweise beschrieben werden mit der bereits oben (s. Gl. IV / A 1 / 2) verwendeten Funktionstypus. Die darin enthaltenen charakteristischen Parameter hängen nun jedoch nicht nur in grundsätzlicher Weise von den Pulk-Parametern, sondern auch von der Zahl der Überlagerungen ab. Man erkennt im Vergleich von Abb. IV / A 2 / 1 mit Abb. IV / A 2 / 2, daß bereits drei Überlagerungen die Quasi-Periodizität der primären Meßwertserie soweit aufheben, daß in der AKF keine wesentlichen Oszillationsanteile mehr auftreten, die zu signifikanten Durchgängen der AKF durch den asymptotischen Grenzwert für  $\tau \rightarrow \infty$  führen.

Der Oszillationsanteil in der AKF klingt im vorliegenden Modellfall seinerseits mit kleinerer Relaxationszeit quasi-exponentiell ab, da die Abstände zwischen den Pulks statistisch stärker variieren und insbesondere infolge der Überlagerung in wachsendem Maße zeitlich unkorreliert sind. Man könnte die Relaxationszeit  $\vartheta_3$  der Oszillationen noch verkürzen, indem man die statistische Variation der Pulk-Längen verstärkt, statistisch verteilte Pausen zwischen den Pulks einführt und/oder die Zahl der Überlagerungen erhöht. Mit dem Einbau von Pausen erniedrigt sich dabei der zeitliche Mittelwert der Photonenrate, während er sich im Gegensatz dazu bei der Erhöhung der Zahl der Überlagerungen vergrößert.

---

\* Ähnliche Wirkungen werden auch bei sonst ungeänderten Pulk-Parametern durch Verkürzung der Pulklänge an den Rändern bzw. durch einsetzende „Überlappung“ der Pulks erreicht. So entsteht z.B. (s. oben) aus einer exponentiellen Häufigkeitsverteilung (s. Abb. IV / A 2 / 1) auch ohne Überlagerung von zwei oder mehr Meßwertserien durch Verkürzung des Auslaufs in der primären Pulk-Form eine etwa Gauß-förmige Häufigkeitsverteilung (s. Abb. IV / A 2 / 2 und 3).



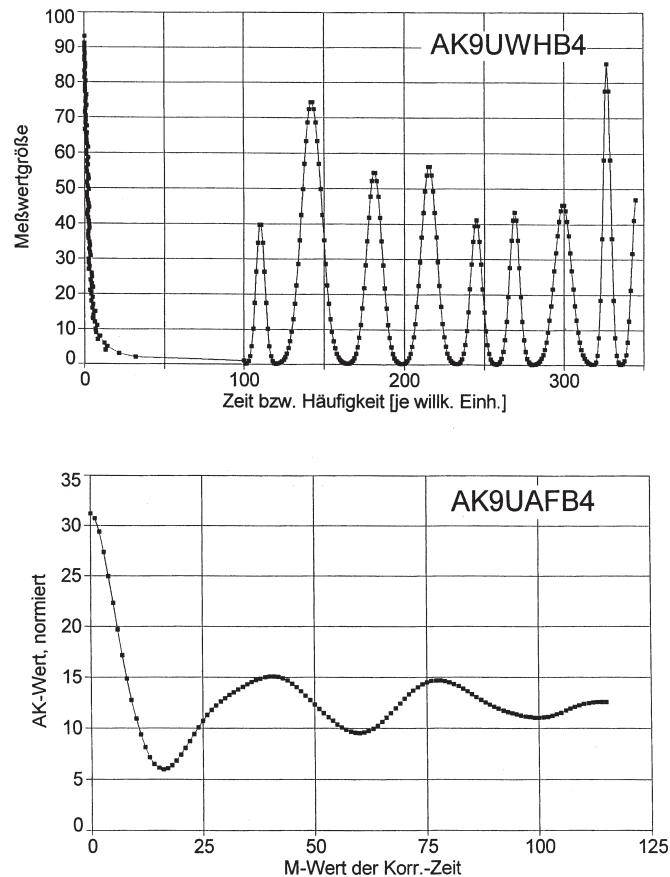


Abb. IV / A 2 - 1 Photonenstrom-Modell: Gauß-Zeitform der Pulks ( Randwerte nahe Null; ohne zusätzliche Pausen; ohne „Selbstüberlagerung“ )

- a) (oben) Zeitliche Abfolge der Meßwerte (Zeitausschnitt) und Häufigkeitsverteilung der Gesamtheit der ca. 6000 Meßwert-Größen,
- b) (unten) Autokorrelationsfunktion (AKF).

Würde in der AKF eine *ungedämpfte* Kosinusfunktion auftreten, so müßte man andererseits daraus schließen, daß in der Zeitfunktion der Meßwerte Photonen-Pulks mit nahezu gleichen Abständen *stationär* auftreten. Dies würde auf eine oszillatorisch einhüllende Zeitfunktion der elektrischen Feldstärke des Strahlungsfeldes schließen lassen, d.h. auf eine Gauß-förmige Modulation mit der gleichen Wiederholungsfrequenz. (vergl. die Diskussion oben).

Der in diesem Abschnitt modellierte Typus der Zeitfunktion des Photonentromes mit der statistischen Abfolge von Gauß-förmigen Pulks, insbesondere mit mehrfacher zeit-

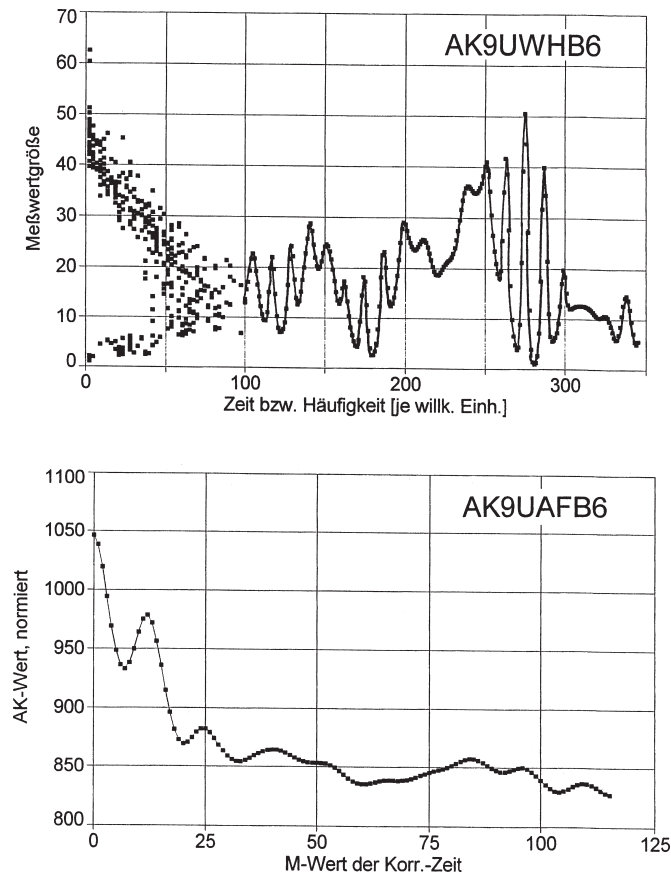


Abb. IV / A 2 - 2 Photonenstrom-Modell: Gauß-Zeitform der Pulks mit „Selbstüberlagerung“ (Randwerte nahe Null; ohne zusätzliche Pausen; *dreifache* „Überlagerung“ )

a) (oben) Zeitliche Abfolge der Meßwerte (Zeitausschnitt) und Häufigkeitsverteilung der Gesamtheit der Meßwert-Größen,

b) (unten) Autokorrelationsfunktion (AKF)

[Bis auf die dreifache Selbst-Überlagerung der Meßwertserie (je mit Versatz) entsprechen alle Modellparameter denen zu Abb. IV / A2 - 1 ]

versetzter „Selbstüberlagerung“, ist geeignet, einige Fälle der experimentell auftretenden Form einer exponentiell abfallenden Autokorrelationsfunktion in Verbindung mit einer zum Mittelwert der detektierten Photonenrate symmetrisch abnehmenden Gauß-förmigen Häufigkeitsverteilung der Meßwertgrößen zu simulieren. Im Experiment werden derartige Photonen-Pulks mit Gauß-Zeitform mehrfach beobachtet, insbesondere im Zusammenhang

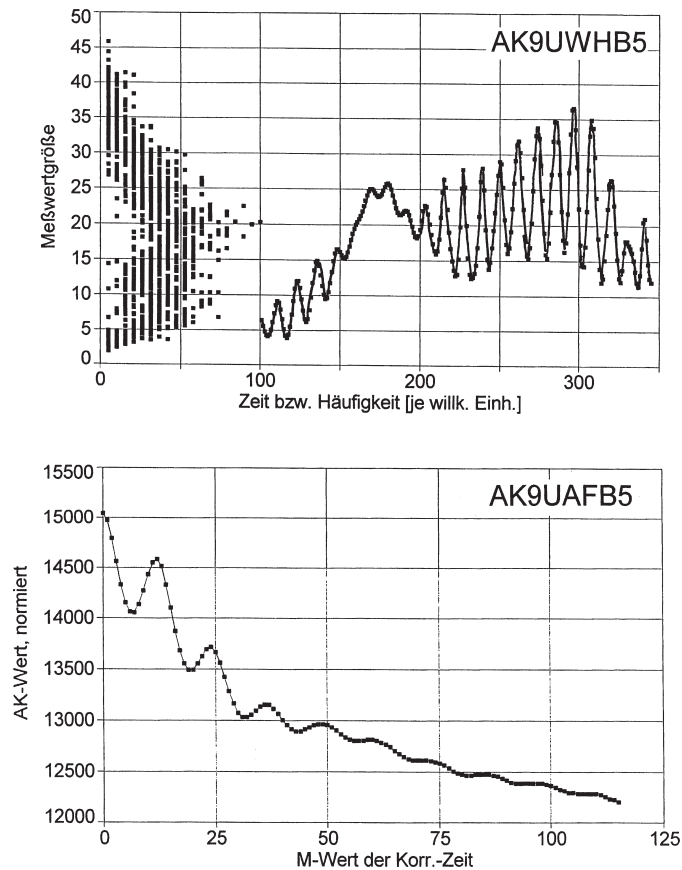


Abb. IV / A 2 - 3 Photonenstrom-Modell: Gauß-Zeitform der Pulks mit „Selbstüberlagerung“  
Randwerte nahe Null; ohne zusätzliche Pausen; *fünffache* „Überlagerung“)

- a) (oben) Zeitliche Abfolge der Meßwerte (Zeitausschnitt) und Häufigkeitsverteilung der Gesamtheit der Meßwert-Größen,
- b) (unten) Autokorrelationsfunktion (AKF)

[ Bis auf die fünffache Selbst-Überlagerung der Meßwertserie (je mit Versatz) entsprechen alle Modellparameter denen zu Abb. IV / A2 - 1 ]

mit der Realisierung kurzer Lichtpulse ( s. z. B. [A8], [A9] ). Andererseits sind Photonenströme mit Gauß-Verteilung der Häufigkeit, also ein „Gauß’sches Strahlungsfeld“, insbesondere in Verbindung mit der Rayleigh-Streuung von Laser-Strahlung beobachtet worden [19] ( vergl. Abschnitt III / A 3 ). In allen diesen Fällen tritt experimentell ein ähnlich scharfer, d.h. exponentieller Abfall der AKF auf. Dabei fehlen zwar weitgehend oszillatorische Anteile in der AKF, diese sind aber insofern keine signifikanten Bestandteile

des vorliegenden Modells, als solche Anteile auch im Modell mit der wachsenden Zahl der in Spiel gebrachten Meßwerte infolge stärkerer Mittelung abnehmen. – Das hier vorgestellte Verfahren der mehrfachen zeitversetzten Selbstüberlagerung einer primären Meßwertserie erscheint ferner geeignet, den experimentellen Sachverhalt eines relativ großen detektierten Photostromes zu modellieren, der Strahlungsanteile enthält, die aus größeren Emissionsvolumina stammen.

#### IV A ] 3. Zeitform gemäß Häufigkeitsverteilung

Die in den vorangegangenen Abschnitten IV /A 1 und A 2 beschriebene Modellierung der Exponential- bzw. Gauß-Zeitform der Photonen-Pulks orientierte sich bezüglich der zeitlichen Meßwertabfolge an den physikalischen Vorgängen der Photonenemission bzw. an der Modulation der elektrischen Feldstärke beim Durchgang der Strahlung durch Materie, z. B. durch statistische Streuvorgänge. Man kann statt dessen aber auch die Häufigkeitsverteilung der Größe der Meßwerte in den Vordergrund stellen und daraus eine „passende“ Zeitform der Photonen-Pulks ableiten. Das führt zwar zu u.U. willkürlichen bzw. „pathologischen“ Zeitformen, erscheint jedoch einer Betrachtung wert, um die daraus folgenden Konsequenzen für die resultierende Autokorrelationsfunktion (AKF) aufzuzeigen.

Es sollen hier jedoch nur Resultate in Bezug auf die Gauß-Verteilung der Häufigkeit dargestellt werden, obwohl auch die Exponentialverteilung rechnerisch in analoger Weise verfolgt wurde. Die Gauß-Verteilung mit ihrem Maximum beim Photonenstrom-Mittelwert wird dabei in zwei unterschiedlichen Zeitformen realisiert:

- a) zeitlich im Pulk monoton fallende Form [ „Tanne“ \*) ] und
- b) zeitlich im Pulk symmetrisch ansteigende und abfallende Form [ „Donkey“ \*) ] .

In beiden Fällen werden die Meßwerte in ihrer Größe innerhalb eines Pulks nicht statistisch mit dem Zufallsgenerator über die Inversionsfunktion der Häufigkeitsverteilung ermittelt, denn dann bestünde gar keine zeitliche Korrelation mehr, sondern mit Hilfe der linear im Intervall 0 bis 1 variierenden Variablen  $0 < Z < 1$ , so daß eine zeitlich monoton abfallende bzw. aufsteigende zeitliche Reihenfolge der Größe der Meßwerte zusammen mit der gewünschten Häufigkeitsverteilung der Meßwertgröße entsteht. – Die Inversion wird bei der Gauß-Verteilung wieder mit Hilfe der im Anhang AH2 beschriebenen Näherung realisiert, wobei „sehr große“ und „sehr kleine“ Werte für die Meßwertgröße anhand entsprechend eingestellter Schwellwerte ignoriert werden [vergl. dazu auch Abschnitt II B 2 b)-β].

##### a) Tannen-Zeitform

Die Meßwertgröße wird in diesem Fall in der genannten Weise für einen Pulk mit der zeitlichen Länge  $[(P_L - 1) * \delta t]$  berechnet mittels Variation von Z in gleichabständigen Schritten ausgehend vom Wert  $P=1$  bis  $P=P_L$  gemäß

---

\* Die zur Verkürzung der Beschreibung eingeführten Namen beziehen sich auf die Gestalt der Meßwerte in ihrer zeitlichen Abfolge: in dem einen Fall wie ein Tannenbaum in dem anderen Fall wie ein Eselsrücken.

$$Z = (P / P_L) - (1 / (2 * P)) \quad (\text{GL. IV / A 3 / 1})$$

Die Pulklänge  $P_L$  wird dabei von Pulk zu Pulk statistisch gleichverteilt variiert in einem geeignet gewählten Intervall. Die Extremwerte der Meßwerte eines Pulks erfahren auf diese Weise ebenfalls eine statistische Variation, denn mit der größeren Z-Schrittweite bei kleinerer Pulslänge wird der Maximalwert verringert und der Minimalwert vergrößert.

Für einen Beispielfall zeigt Abb. IV / A 3 - 1a) die Meßwertabfolge für einen gewissen Zeitausschnitt. Die Abb. IV / A 3 - 1a) stellt auch die Häufigkeitsverteilung der Meßwerte dar. Die Gesamtzahl der Meßwerte liegt bei ca. 10000. Die Gauß-Verteilung der Häufigkeit ist erkennbar typisch realisiert.

Abb. IV / A 3 - 1b) zeigt die gewonnene AKF für diesen Modellfall. Man erkennt ein signifikantes exponentielles Relaxationsverhalten auf das Quadrat des Mittelwertes der Meßwertgröße, dem eine oszillatorische Schwankung überlagert ist, deren Amplitude ihrerseits auf Null relaxiert. Für die folgende Funktionsdarstellung der AKF als grobe Näherung für den Verlauf wurden die Konstanten durch Abschätzung gewonnen:

$$\text{AKF}(M) = 100 + 8 * [\exp(-M/2)] + 4 * [\exp(-M/30)] * \cos(2\pi * M * \delta\tau / \Delta\tau)$$

$$\text{mit } \Delta\tau = 40 * \delta\tau; M = \text{Schrittzahl der Verzögerungszeit} \quad (\text{Gl. IV / A 3 / 2})$$

Eine derartige exponentielle Relaxation der AKF mit abklingender überlagerter Oszillation ist zu erwarten, denn der steile Meßwert-Anfangsanstieg mit nachfolgendem monotonen Größenabfall in einem Pulk legt einen Vergleich mit dem reinen Exponential-Pulk (s. Abschnitt IV / A 1) nahe.

### ***b) Donkey-Zeitform***

Die Zeitform des Pulks unterscheidet sich von der vorangehenden dadurch, daß die (auch hier jeweils statistisch variierte) Länge des Pulks halbiert ist und die in ihrer Größe Gauß-verteilten Meßwerte wie oben, aber jetzt jeweils für eine Hälfte berechnet werden. In der ersten Hälfte werden sie vom Mittelwert subtrahiert, in der zweiten Hälfte addiert. Damit ergibt sich in der ersten Hälfte ein monotoner Größenanstieg und in der zweiten Hälfte ein monotoner Abfall in der Zeitform des Pulks. Auf diese Weise kommt die „Donkey“-Form zustande.

Für diese Zeitform, die eher mit einem quasi-oszillierenden Auf und Ab der Größenwerte verglichen werden könnte, zeigt Abb. IV / A 3 - 2a) eine begrenzte Meßwertabfolge zur Veranschaulichung. Abb. IV / A 3 - 2a) stellt auch hier die zugehörige Häufigkeitsverteilung der etwa 10000 Meßwerte dar. Die Gaußverteilung ist (innerhalb der begrenzenden Schwellenwerte) auch hier, wenn auch mit vergleichsweise stärkerer Streuung, erwartungsgemäß signifikant realisiert.

Abb. IV / A 3 - 2b) zeigt die gewonnene AKF. Man findet wieder zunächst einen „scharfen“ Abfall, dem allerdings jetzt im Vergleich mit der Zeitform „Tanne“ eine stärkere und quasi-harmonische Kosinus-Oszillation überlagert ist, deren Amplitude exponentiell

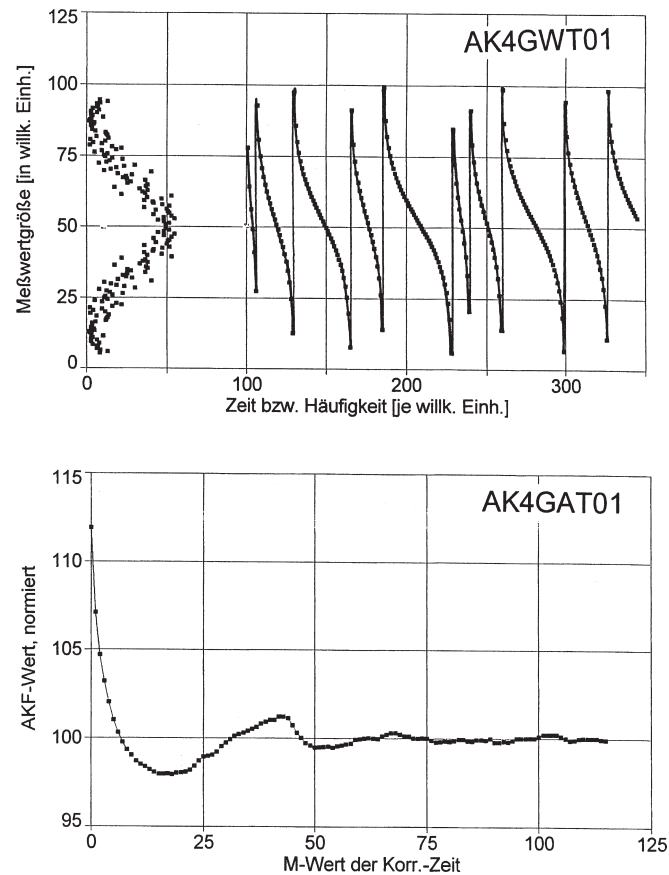


Abb. IV / A 3 - 1 Photonenstrom-Modell: Puls mit monoton abnehmender Zeitform („Tanne“), abgeleitet aus Gauß-förmiger Häufigkeitsverteilung

- a) (oben) Zeitliche Abfolge der Meßwerte (Zeitausschnitt) und Häufigkeitsverteilung der Gesamtheit der Meßwert-Größen,
- b) (unten) Autokorrelationsfunktion (AKF)

[Die Berechnungsparameter sind denen der Abb. IV / A 3 - 2 gleich.]

auf Null relaxiert. Durch diese Überlagerung ist der anfängliche, auch hier wohl exponentielle Relaxationsanteil der AKF bereits etwas „verformt“. Im Prinzip entspricht die AKF aber doch ebenfalls der durch Gl. IV / A 3 / 2 beschriebenen Funktionsform, selbstverständlich mit anderen Konstanten. - Der unmittelbare Vergleich der Ergebnisse in den beiden Abbildungen ist insofern gerechtfertigt, als die Berechnungsparameter für die Meßwerte in den beiden dargestellten Modellfällen gleich sind. Nur die Form der zeitlichen Abfolge ist geändert.

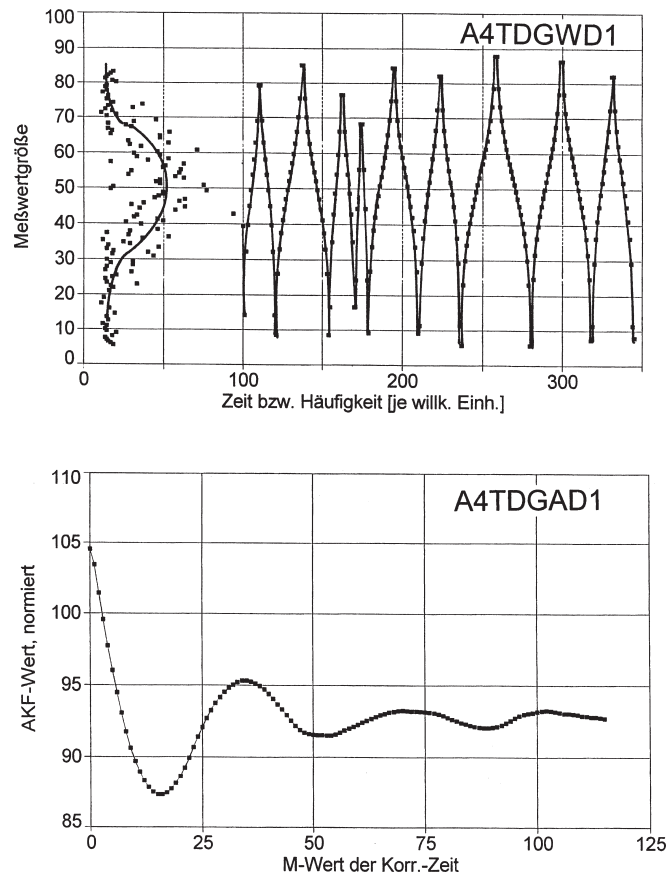


Abb. IV / A 3 - 2 Photonenstrom-Modell: Pulks mit symmetrisch ansteigender und abnehmender Zeitform („Donkey“), abgeleitet aus Gauß-förmiger Häufigkeitsverteilung

- a) (oben) Zeitliche Abfolge der Meßwerte (Zeitausschnitt) und Häufigkeitsverteilung der Gesamtheit der Meßwert-Größen,
- b) (unten) Autokorrelationsfunktion (AKF)

[Die Berechnungsparameter sind denen der Abb. IV / A 3 - 1 gleich.]

Ein größerer überlagerter Oszillationsanteil an der AKF war im zweiten Fall zu erwarten, denn die stärker „abgerundete“ Donkey-Pulk-Zeitform, die einer quasi-periodischen Oszillation näher kommt als die Tannen-Form, läßt von Pulk zu Pulk eine Wiederholungsstruktur erscheinen, die jetzt eher mit der Gauß-Zeit-Form im Abschnitt IV / A 2 zu vergleichen ist, bei der ebenfalls stärkere, relaxierende Oszillationsanteile in der AKF aufgetreten sind.

#### IV B ] Photonen-Gleichstrom mit symmetrischen Schwankungen

Erhöht man in dem vom Detektor erfaßten geometrischen Fenster die insgesamt stationäre Strahlungsintensität, so erhöht sich die zu detektierende Photonenrate schließlich soweit, daß der Detektor infolge seiner Trägheit, bzw. infolge der Trägheit des gesamten „Anzeigekanals“, das Eintreffen der einzelnen Photonen nicht mehr zeitlich auflösen kann. Es wird ein „Gleichstrom“-Mittelwert angezeigt, der allerdings in seiner *momentanen* Größe stets statistische Schwankungen besitzt. Setzt man voraus, daß an diesem Schwankungen das äquivalente Eingangsrauschen des Detektors nicht wesentlich beteiligt ist, so handelt es sich also um Schwankungen des Photonenstromes selbst, wie er von der Lichtquelle emittiert bzw. beim Durchgang durch die Materie „aufmoduliert“ worden ist. Emissionsschwankungen können dabei z. B. aus „Rückkopplungsmechanismen“ entstehen, die ihrerseits auf thermischen Effekten, (Gas- oder Flüssigkeits-) Strömungen in der Lichtquelle oder energetischen Nachlieferungsengpässen basieren. Modulationschwankungen in der Materie können z.B. durch Fluktuationen in der Temperatur, im Druck oder der Licht-induzierten Wechselwirkung entstehen.

Die Zeitfunktion dieser dem stationären Mittelwert überlagerten und detektierbaren Schwankungen kann entsprechend unterschiedlich sein. Im Abschnitt IV / A wurden in der Zeitform „unsymmetrische“ Schwankungen behandelt, die aus der zeitlichen Abfolge und/oder Selbstüberlagerung von Photonen-Pulks gegebener Zeitform entstanden waren. Im vorliegenden Abschnitt IV / B sollen nun „symmetrische“, d.h. im Mittel gleichwahrscheinlich positive und negative Schwankungen betrachtet werden. Drei Schwankungs-Muster in der Zeitform werden dabei ins Auge gefaßt:

- 1.) exponentielle,
- 2.) Gauß-förmige und
- 3.) „rauschende“, d.h. sich statistisch verändernde Abweichungen.

Die inhärenten Parameter dieser dem Mittelwert überlagerten Schwankungsereignisse nach a) und b) werden bei der Modellierung von Ereignis zu Ereignis statistisch variiert.

Wesentlicher Betrachtungspunkt ist jeweils neben der resultierenden AKF auch die Frage der sich einstellenden Häufigkeitsverteilung der detektierten „Meßwerte“.

##### 1.) Exponential-Zeitform

Ist die Zeitfunktion des Photonenstromes Ausdruck einer Leistungsabstrahlung des emittierenden System, mit dem es auf den Mittelwert der abgegebenen Leistung und damit auf seinen stationären Gleichgewichtszustand relaxiert, nachdem statistische Fluktuationen zu einer diesbezüglich abrupten Abweichung geführt haben, so bietet sich eine Modellierung des Photonenstromes an, bei dem in statistischer Folge positive und negative Exponential-Zeitformen auftreten. Dabei liegt i. allg. in guter Näherung ein „Gaußsches Strahlungsfeld“ vor, denn die Häufigkeitsverteilung der Meßwerte fällt dabei beiderseits zum Mittelwert symmetrisch und ( etwa ) Gauß-förmig ab (vergl. die bereits oben in Abschnitt III C geführte Diskussion zum Gauß'schen Strahlungsfeld).



In der dazu durchgeführten Modellierung der Zeitfunktion eines entsprechenden Photonenstromes werden die Meßwerte analog zu dem Vorgehen im vorangegangenen Abschnitt IV / B 1 berechnet, wobei der Maximalwert des Exponentialpulses und die Zeitdauer bzw. die Schrittzahl für einen Pulk wiederum in einem vorgegebenen Intervall statistisch gleichverteilt bzw. statistisch Gauß-förmig verteilt variiert werden. Die Relaxationszeitkonstante der Exponentialfunktion selbst ist für alle Pulks jedoch gleich groß.

Die Abb. IV / B 1 - 1a zeigt zur Veranschaulichung der Zeitfunktion für ein Beispiel die Abfolge von Meßwerten in einem entsprechenden Zeitintervall und die Häufigkeitsverteilung der Meßwerte bei einer Gesamtheit von ca. 10000 Werten. Damit wird nachgewiesen, daß bei diesem Modellansatz der Abfall der Häufigkeitsverteilung symmetrisch zum Mittelwert und praktisch Gauß-förmig erfolgt.

Die Abb. IV / B 1 - 1b stellt die zugehörige, d.h. mit dem Computer-Autokorrelator ermittelte  $AKF^{(1)}_s$  dar: Es findet sich ein signifikantes Relaxieren in der Form einer Exponentialfunktion vom Maximalwert  $AKF^{(1)}_s(\tau = 0)$  auf das Quadrat des Mittelwertes der Meßwerte, d.h. auf den asymptotischen Wert  $AKF^{(1)}_s(\tau \rightarrow \infty)$ . Im vorliegenden Fall des Photonenstrom-Modells ist praktisch kein oszillatorischer Anteil in der  $AKF^{(1)}_s(\tau)$  vorhanden. Deswegen kann in diesem Modellansatz, umgekehrt gesehen, eine geeignete Modellierung für rein exponentiell relaxierende Photonenstrom-Autokorrelationsfunktionen gesehen werden. Damit ist das Modellresultat in qualitativer Übereinstimmung mit dem Befund in spezifischen Experimenten (vergl. dazu z.B. [A2]). Das Resultat entspricht auch dem theoretisch gegebenen Sachverhalt, daß die Autokorrelationsfunktion einer Exponentialfunktion wiederum eine Exponentialfunktion ist (vergl. oben Abschnitt II / B 3a). Das gilt folglich auch, wie hiermit als Modellfall aufgezeigt ist, für Pulk-artig wiederholte bzw. als Einhüllende einer harmonischen Zeitfunktion auftretende Exponentialfunktionen.

#### IV B ] 2. ) Überlagerte Gauß-förmige Schwankungen

Bei gewissen Experimenten lassen die Messungen der Zeitfunktion der Photonenrate am Detektorausgang Schwankungen erkennen (vergl. z.B. [A2]), die auf eine quasi Gauß-förmig modulierte Einhüllende der Amplitude der oszillierenden elektrischen Feldstärke schließen lassen. Ebenso liegt auch immer dann eine Gauß-förmige Zeitfunktion der Einhüllenden der elektrischen Feldstärke und damit der Photonenrate vor, wenn die spektrale Amplitudendichte um ein Maximum bei der zentralen Frequenz  $\omega_0$  symmetrisch Gauß-förmig abfällt. So verhält es sich z.B. bei den Doppler-verbreiterten Spektrallinien (vergl. Abschnitt III / A 3).

Schwankungen dieser Art sind sowohl positiv als auch negativ additiv zum Mittelwert und die Parameter der Einzelschwankung ändern sich statistisch, so daß der Eindruck eines „geglätteten Rauschens“ entsteht, ganz ähnlich dem bei der Überlagerung von Tiefpaß-gefiltertem „Weißen Rauschen“ (vergl. dazu den folgenden Abschnitt IV / B 3). – Dabei liegt i. allg. außerdem in guter Näherung ein „Gaußsches Strahlungsfeld“ vor und in Konsequenz daraus fällt die Häufigkeitsverteilung der Meßwerte damit praktisch ebenfalls beiderseits zum Mittelwert symmetrisch ( etwa ) Gauß-förmig ab (vergl. oben).

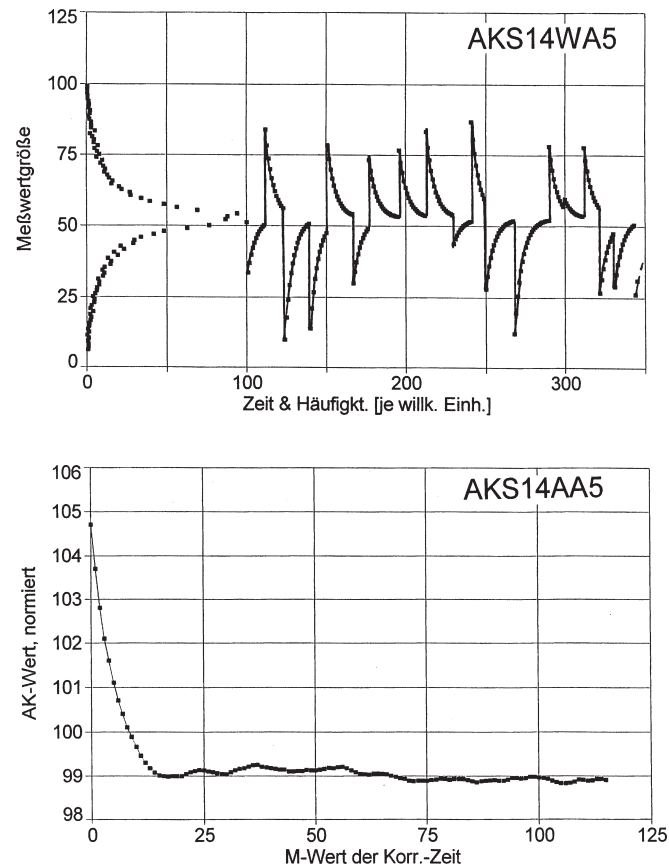


Abb. IV / B 1 - 1 Photonenstrom-Modell: Statistisch-symmetrische Schwankungen um den stationären Mittelwert in der Form von Exponential-Pulks

- a) (oben) Zeitliche Abfolge der Meßwerte (Zeitausschnitt) und Häufigkeitsverteilung der Gesamtheit der Meßwert-Größen,
- b) (unten) Autokorrelationsfunktion (AKF)

In der dazu durchgeführten Modellierung der Zeitfunktion eines entsprechenden Photonenstromes werden die Meßwerte wie folgt berechnet :

1. Die zeitliche Länge einer Gauß-förmigen Abweichung wird statistisch variiert.
2. Das Vorzeichen der Abweichung wird statistisch gleichverteilt positiv und negativ erzeugt.
3. Der Maximalwert der Abweichung ist von Fall zu Fall verschieden und ist seinerseits statistisch Gauß-verteilt mit einem eigenen, feststehenden Halbwertsparameter.

4. Der Relaxationsparameter der eigentlichen Gauß-Zeitform ist statistisch gleichverteilt in einem vorgegebenen Intervall.
5. Zwischen zwei Gauß-förmigen Abweichungen wird gegebenenfalls eine „Nullwert-Pause“ eingefügt, deren Länge statistisch gleichverteilt in einem vorgegebenen Intervall variiert.

Der relevante Ausschnitt dazu aus dem Programm „AKSP12GT“ ist im Anhang AH 1 aufgeführt, gewissermaßen auch als „Muster“ der entsprechenden Berechnungsroutinen, wie sie in dieser Arbeit gestaltet wurden.

Die Abb. IV / B 2 - 1a zeigt zur Veranschaulichung der hier betrachteten Zeitfunktion als Beispiel die Abfolge der Meßwert in einem (willkürlichen) Zeitausschnitt und dazu ferner die Häufigkeitsverteilung der Meßwerte bei einer Gesamtheit von ca. 10000 Werten. Damit wird bestätigt, daß in diesem Modell der Verlauf der Häufigkeitsverteilung praktisch genau symmetrisch zu Mittelwert erfolgt und etwa einer Gauß-Verteilung entspricht.

Die Abb. IV / B 2 - 1b stellt die zugehörige, d.h. mit dem Computer-Autokorrelator ermittelte,  $AKF_s^{(1)}$  dar: Es findet sich ein signifikantes Relaxieren in der Form einer Gauß-Kurve vom Maximalwert  $AKF_s^{(1)}(\tau=0)$  auf das Quadrat des Mittelwertes der Meßwerte, d.h. auf den asymptotischen Wert  $AKF_s^{(1)}(\tau \rightarrow \infty)$ .

Da im vorliegenden Fall der Modellierung der Zeitfunktion der Photonenrate nur ein relativ schwacher oszillatorischer Anteil in der  $AKF_s^{(1)}(\tau)$  vorhanden ist, kann in dieser Darstellungsform eine geeignete Modellierung für eine praktisch rein *Gauß-förmig* relaxierende Photonenstrom-Autokorrelationsfunktionen gesehen werden. Dabei stehen die Modellannahmen in guter Übereinstimmung mit experimentell gefundenen Sachverhalten und auch theoretisch gegebenen Zusammenhängen, wonach nämlich eine Gauß-förmige Zeitfunktion der Einhüllenden harmonischer Funktionen (auch in statistischer Wiederholung in Pulk-Form) zu einer Gauß-förmigen AKF führt (vergl. Abschnitt II / B 3a).

#### IV B ] 3.) Rauschen

Die zeitlich statistischen Abweichungen des Photonenstromes von seinem Mittelwert und damit auch die zeitlichen Abweichungen der im Sampling-Zeitraum  $\delta t$  gewonnenen Meßwerte von ihrem Mittelwert, können auch den Charakter von „Rauschen“ besitzen, d.h. eine definierte analytische Zeitfunktion der Abweichungen ist, auch in kürzeren Zeitabschnitten, nicht zu erkennen, d.h. die Abweichungen sind ohne erkennbare Bevorzugungen von Vorzeichen, Größe und Wiederholungsmustern ( s. z. B. [A10] ). Die Zeitfunktion ist aber insgesamt insofern stationär, als der statistische Mittelwert, gemessen über ein geeignet ausgedehntes Zeitintervall (etwa 100 Meßwerte sollten genügen) konstant ist innerhalb des analysierten Zeitraumes  $\Delta t$ .

Bei näherer Analyse dieses Rauschverhaltens der Meßwerte, etwa mittels der diskreten Fourier-Analyse, läßt dann in der spektralen Amplitudendichte ein quasi „Weißes-Rauschen“ erkennen, das bei sehr tiefen und sehr hohen Frequenzen auf Null abfällt. Die obere Grenzfrequenz besitzt die Periodendauer  $2 \cdot \delta t$  und die untere Grenzfrequenz die Periodendauer  $2 \cdot \Delta t$ .

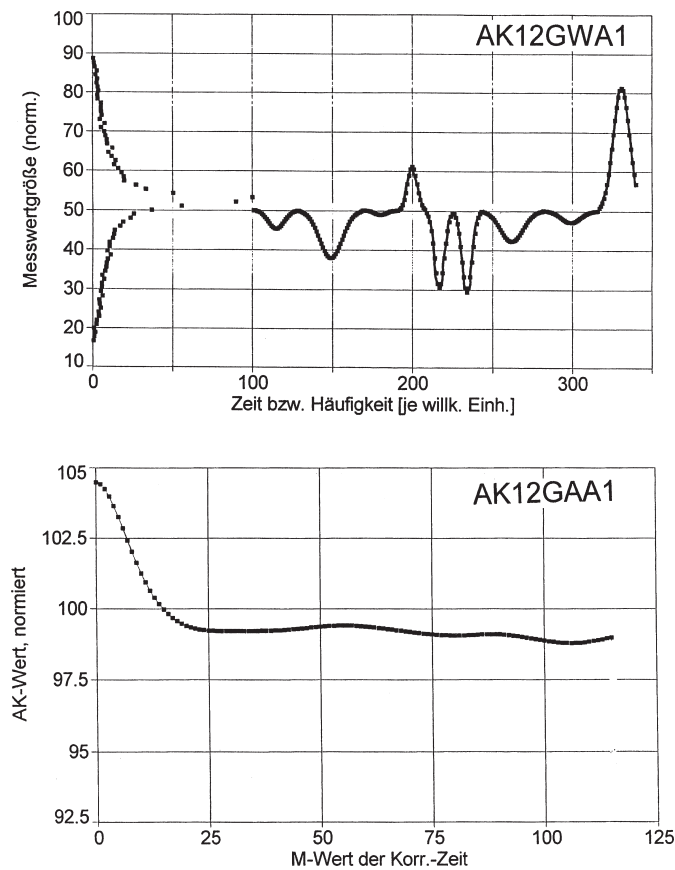


Abb. IV / B 2 - 1 Photonenstrom-Modell: Statistisch-symmetrische Schwankungen um den stationären Mittelwert in der Form von Gauß-Pulks

- a) (oben) Zeitliche Abfolge der Meßwerte (Zeitausschnitt) und Häufigkeitsverteilung der Gesamtheit der Meßwert-Größen,
- b) (unten) Autokorrelationsfunktion (AKF)

Innerhalb der Qualitätsbezeichnung der zeitlichen Meßwert-Abfolge als „Rauschen“ bzw. „Weißes Rauschen“, die also spektral gesehen einen relativ breiten Frequenzumfang besitzt, kann noch die Häufigkeitsverteilung der Größe der Meßwerte gesondert betrachtet werden: Die statistische Verteilungsfunktion des Auftretens der *Größe* der Meßwerte kann ihrerseits charakteristisch, d. h. mittels einer mathematischen Funktion beschreibbar sein. Mögliche Verteilungen sind z. B. die Gleichverteilung innerhalb eines bestimmten Größenintervalls, die Exponentialverteilung und die Gauß-Verteilung. Solche analytischen

Verteilungsfunktionen werden bei endlicher Gesamtzahl der Meßwerte naturgemäß bei einer Histogramm-Analyse der effektiv auftretenden Meßwerte nur mit statistischer Streuung, d.h. angenähert gefunden, wobei sich diese Ungenauigkeit ihrerseits mit wachsender Zahl der Meßwerte reduziert. – Als repräsentativ für derartige Betrachtungen sollen in der vorliegenden Arbeit nur die „Gleichverteilung“ und die „Gauß-Verteilung“ der Größe der Meßwerte um den stationären Mittelwert dargestellt und diskutiert werden.

Dazu wird eine Zeitfunktion des Rauschens betrachtet, d.h. eine diskrete zeitliche Abfolge von „primären Meßwerten“, die statistisch völlig unkorreliert sind, jedoch mit einer vorgegebenen Häufigkeitsverteilung auftreten. Wie oben (vergl. Abschnitt II / C ) bereits ausgeführt und auch in den folgenden Fällen mit den beiden vorgegebenen Häufigkeitsverteilungen bestätigt wird, ist jedoch in einem solchen Fall die Autokorrelationsfunktion stets bis auf den ersten Wert bei der Verzögerungszeit  $\tau=0$  eine Konstante.

Zur Modellbildung eines spezifischen Photostromes mit einer charakteristischen AKF müssen deshalb diese unkorrelierten, d. h. rein statistisch schwankenden „primären Meßwerte“ noch modifiziert werden. Das kann z. B. auf dreifache Weise geschehen.

- 1.) Glättung mittels „Smoothing“,
- 2.) Einfügung von Interpolationswerten mittels Spline-Funktionen unter Beibehaltung der primären Werte als Stützstellen und
- 3.) Kombination von Glättung und Einfügung von Interpolationswerten, wobei die Stützstellen der Spline-Funktionen selbst im Sinne der Glättung geändert sind.

Alle drei Modifikationen wurden im vorliegenden Fall unter Verwendung des numerischen Verfahrens nach C. H. Reinsch [A5] durchgeführt, wobei die Parameter entsprechend gewählt wurden.

Selbstverständlich wird in allen Fällen die spektrale Amplitudendichte bzw. damit auch die spektrale Leistungsdichte entsprechend der Verteilungsfunktion der Meßwertgröße und der stattgefundenen Glättung modifiziert. Bei der „Glättung“ reduziert sich, dies ist unmittelbar einsichtig, die obere Grenzfrequenz des Frequenzspektrums. Bei der Einfügung von Interpolationswerten unter *Beibehaltung* der primären Meßwerte als die „Stützstellen“ für die Spline-Darstellung der stetigen Funktion wird dagegen die Zeitachse der Meßwert-Abfolge gedehnt in Relation zu dem durch die Samplingzeit  $\delta t$  gegebenen Zeittakt des Autokorrelators, wobei die eingefügten Werte überdies zwischen den Stützstellen ausgleichend „vermitteln“. Auf diese Weise werden nicht nur die hohen Frequenzanteile reduziert, sondern es treten verstärkt tiefe Frequenzen auf. Dabei hängen die als verstärkt auftretenden Frequenzen in einfacher Weise von der Zahl der zwischen die Stützstellen eingefügten Interpolationswerte ab <sup>\*)</sup>.

---

\* Bezogen auf die beiden folgenden Beispiele primärer Meßwerte in Abb. IV / B 3 - 1 und - 4 kann man erkennen, daß zwischen zwei relativ extremal großen Stützstellenwerten ein Abstand von etwa drei Zeitschritten besteht. Fügt man je Zeitschritt vier Meßwerte, und damit vier weitere Zeitschritte ein, so ergibt sich in der Meßwertabfolge mit Hilfe der relevanten Spline-Funktion eine prominente Quasi-Periodendauer von fünfzehn Zeitschritten. Damit treten dann erwartungsgemäß in der AKF Oszillationen mit einer Periodendauer von fünfzehn Schritten in der Verzögerungszeit auf.

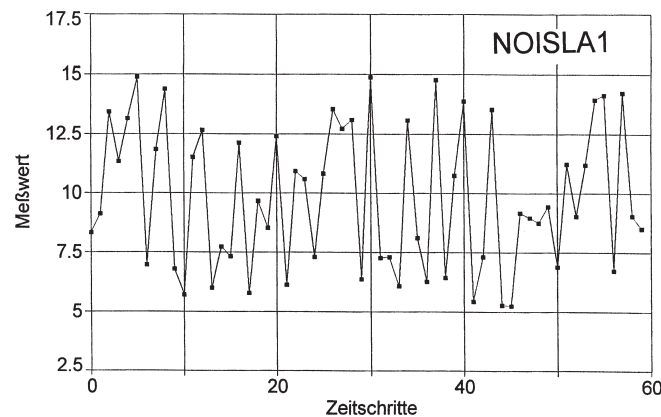


Abb. IV / B 3 - 1 Zeitausschnitt der zeitlichen Abfolge der Meßwerte in rein statistischer Sequenz mit statistischer Gleichverteilung der Meßwert-Größe innerhalb eines symmetrischen Intervalls um den stationären Mittelwert (Beispiel „LA1“).

In allen drei oben genannten Fällen der Modellierung ergibt sich also zunächst eine Absenkung der oberen Grenzfrequenz des gefilterten Weißen Rauschens und man kommt zu Betrachtungen zurück, die bereits oben bei der Diskussion der „Tiefpaßfilterung“ (s. Abschnitt II / C ) angestellt wurden. Dies gilt auch in Bezug auf die damit gegebenen Modifikationen in der erwarteten Autokorrelationsfunktion.- Eine Wiederholung der Diskussion erübrigt sich also hier.

Die folgenden Abb. IV / B 3 - 1 bis - 5 geben je ein Beispiel für die erzielten Veränderungen in der Meßwert-Abfolge und der zugehörigen AKF bei zwei Modifikationsarten an.

#### a) Rauschen mit Gleichverteilung

In der Modellbildung eines schwankenden Photostromes mit Abweichungen um den Mittelwert sieht das erste Beispiel vor, daß die „primären Meßwerte“ in ihrer zeitlichen Abfolge statistisch um diesen Mittelwert streuen, wobei die Häufigkeitsverteilung der Meßwerte über einem Intervall  $\Delta Y$ , in dessen Mitte der Mittelwert liegt, konstant ist. Im Programm wird der Meßwert  $Y$  mit Hilfe des internen Zufallsgenerators für die Zahl  $Z$  wie folgt gebildet werden:

$$Y = Y_{\text{mittel}} + A * (Z - 0.5) \quad (\text{GL. IV / B 3 / 1})$$

mit  $0 < Z < 1$  gleichverteilt im Intervall 0 bis 1 ;  $A \leq Y_{\text{mittel}}$

Abb. IV / B3 - 1 stellt in einem Zeitausschnitt die Abfolge derartiger „primärer Meßwerte“ dar. Abb. IV / B3 - 2a zeigt im rechten Teilbild die neue zeitliche Abfolge der Meßwerte\* in

\* Zur besseren Darstellung wurden die Meßwerte inzwischen auf den Wert 100 für ihren Maximalwert normiert

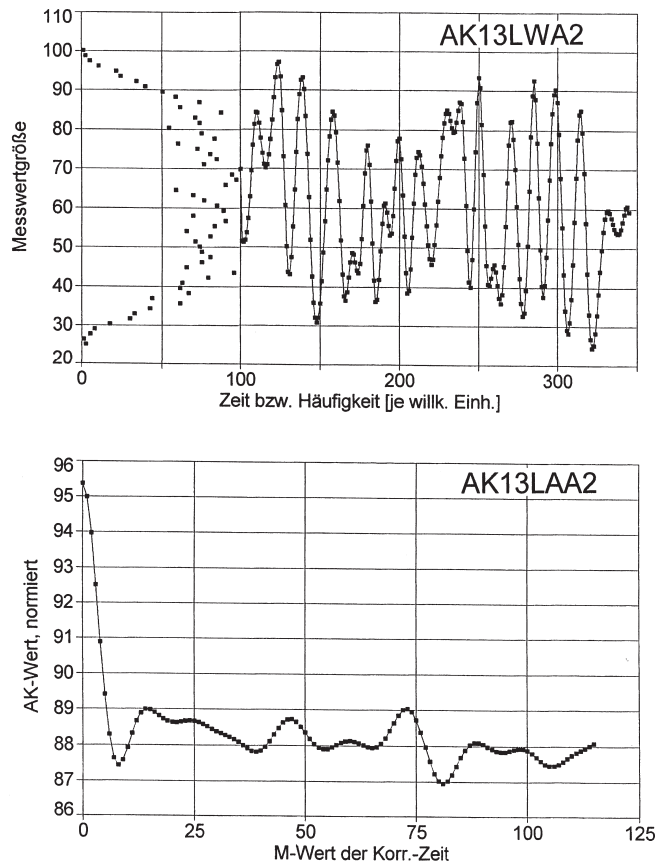


Abb. IV / B 3 - 2 Photonenstrom-Modell: Im Mittelwert stationärer Photonenstrom plus symmetrischem Rauschanteil mit Gleichverteilung und Zugabe von je 4 Interpolationswerten bei Vorgabe der Stützstellenwerte nach Beispiel „LA1“ (s. Abb. IV / B 3 -1)

- a) (oben) Zeitliche Abfolge der Meßwerte (Zeitausschnitt, der dem Anfangsteil in Abb. IV / B 3 -1 entspricht) und Häufigkeitsverteilung der ca. 6000 Meßwert-Größen
- b) (unten) Autokorrelationsfunktion (AKF).

einem Zeitintervall, das dem Anfangsteil des in Abb. IV / B 3 - 1 dargestellten Zeitintervalls entspricht, und damit die Veränderungen, die bei der Einfügung von je vier Interpolationswerten zwischen die „primären Meßwerte“ auftreten: Das „Zeitmuster“, das als solches erhalten geblieben ist, erscheint jetzt „abgerundet“.

Das linke Teilbild in Abb. IV / B 3 - 2a) zeigt die „empirisch“ aufgenommene Häufigkeitsverteilung der mit der Interpolationseinfügung gewonnenen neuen Meßwerte. Im Resultat bestätigt diese „Plateau-Form“ der Verteilung, bis auf den beiderseitigen Abfall zum Rande hin, die vorgegebene Gleichverteilung symmetrisch zum Mittelwert in dem gegebenen Größenintervall.

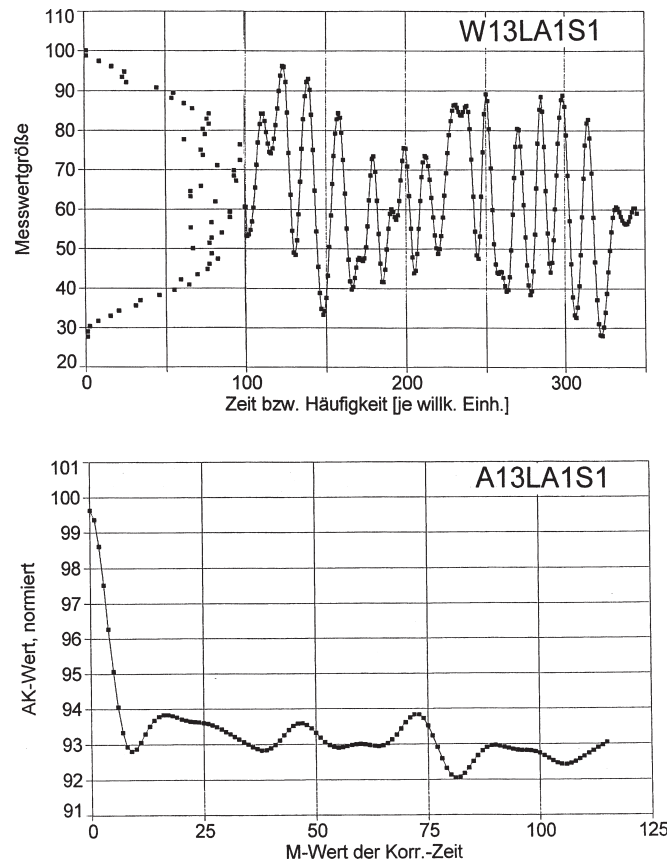


Abb. IV / B 3 - 3 Photonenstrom-Modell: Im Mittelwert stationärer Photonenstrom plus symmetrischem Rauschanteil mit Gleichverteilung nach Zugabe von je 4 Interpolationswerten bei Vorgabe der Stützstellenwerte nach Beispiel „LA1“ (s. Abb. IV / B3 -1).

- a) (oben) Zeitliche Abfolge der Meßwerte (Zeitausschnitt entsprechend dem in Abb. IV / B 3 -2 dargestellten) und Häufigkeitsverteilung der Meßwert-Größen
- b) (unten) Autokorrelationsfunktion (AKF).

Das zugehörige Teilbild Abb. IV / B3 - 2b) zeigt die resultierende AKF. Diese besitzt eine signifikante, nahezu exponentielle Relaxation auf den Erwartungswert  $\langle Y(t) \rangle^2$ . Im Anfangsbereich, d.h. hier bis zu Verzögerungszeiten von etwa  $\tau = 115 \cdot \delta\tau$ , zeigt die AKF zwar deutliche statistische Schwankungen, es ist jedoch zu beachten, daß die Gesamtzahl der hier im Beispiel analysierten Meßwerte nur ca. 3000 beträgt. Mit größerer Gesamtheit der Meßwerte wird sich fraglos die AKF bei bestehenbleibendem Grundverhalten des exponentiellen Abfalls auf den konstanten Wert glätten.

Abb. IV / B3 - 3 a) zeigt am Beispiel der *gleichen* „primären Meßwerte“ (s. Abb. IV / B3 - 1) die Veränderungen, die auftreten, wenn eine Glättung der Abfolge der primären



Meßwerte (= Stützstellen-Abfolge) eingeschaltet wird. Im Beispiel ist die Glättung (mit dem Programm-Parameter  $S=100$ ) noch relativ schwach. Man erkennt aber in Abb. IV / B3 - 3a die erfolgte Reduktion der Schwankungsamplituden und die deswegen entsprechende „Verengung“ der Häufigkeitsverteilung der Meßwerte um den Mittelwert.

Die AKF [s. Abb. IV / B3 - 3 b) ] ist der Struktur nach gegenüber Abb. IV / B3 - 2b) jedoch relativ wenig verändert, weil die Grundlage der Meßwertabfolge, nämlich die Abfolge der primären Meßwerte, ungeändert ist. Es ist aber festzustellen, daß deutlich und generell die Größe der Autokorrelationskoeffizienten als Folge der Glättung der Zeitfunktion der Meßwerte quantitativ zugenommen hat. Dies entspricht der Tatsache, daß sich durch die Glättung der Abfolge der primären Meßwerte der Zeitbereich der Korrelation zwischen den Meßwerten ausgedehnt hat.

### b) Rauschen mit Gauß-Verteilung

Die Gauß-förmige Häufigkeitsverteilung der Meßwerte beidseitig symmetrisch zum Mittelwert wird nach den oben bereits erläuterten numerischen Verfahren erzeugt. Der Relaxationsparameter dieser Gauß-Verteilung wird so gewählt, daß die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Meßwerten an den Grenzen des Variationsintervalls  $\Delta Y$  nur mehr gering ist. Die noch verbleibenden wenigen Fälle mit  $Y > (Y_{\text{mittel}} + \Delta Y/2)$  bzw.  $Y < (Y_{\text{mittel}} - \Delta Y/2)$  werden ausgesondert, um die Rechnungen und Graphiken beschränkt zu halten. Die Statistik wird damit nicht wesentlich gestört.

Die Abb. IV / B 3 - 4 zeigt zunächst die „primären Meßwerte“ in einem Zeitausschnitt zum Vergleich mit der Meßwertabfolge nach Glättung ( $S=500$ ) und Einfügung von vier Interpolationswerten pro primärem Meßwertpaar in Abb. IV / B3 - 5 a). Die Meßwert-

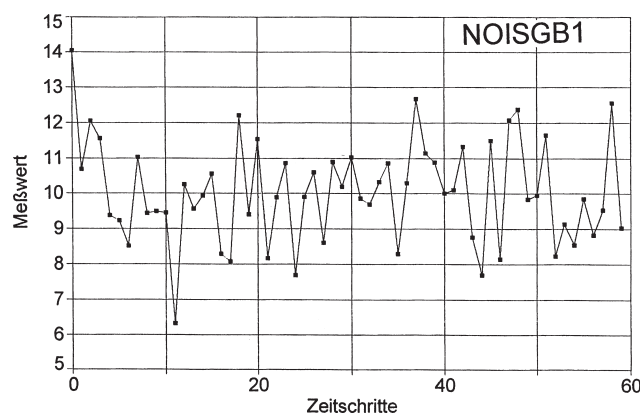


Abb. IV / B 3 - 4 Zeitausschnitt der zeitlichen Abfolge der Meßwerte in rein statistischer Sequenz mit statistischer Gauß-Verteilung der Meßwertgröße innerhalb eines symmetrischen Größenintervalls um den Mittelwert (Beispiel „GB1“).

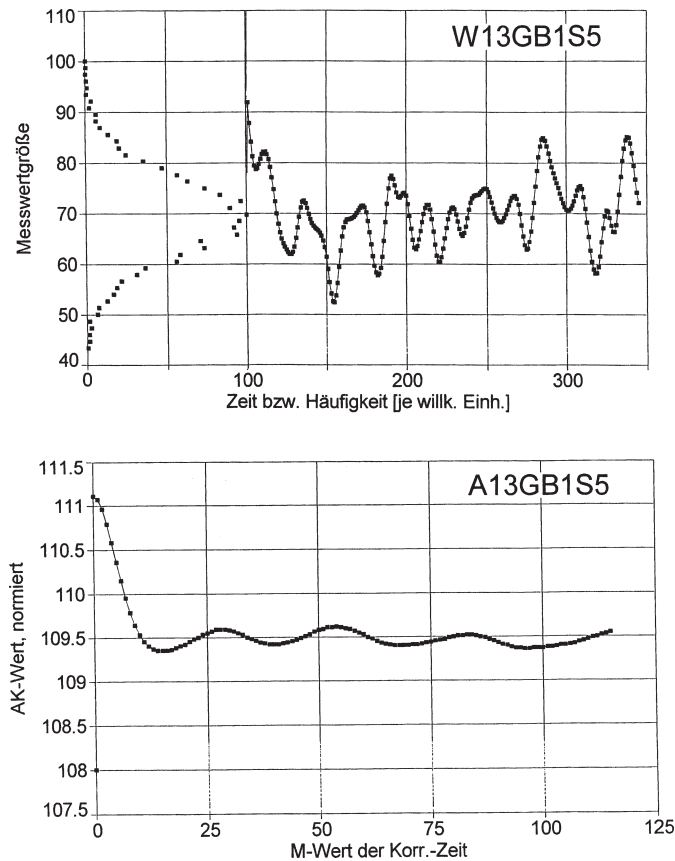


Abb. IV / B 3 - 5 Photonenstrom-Modell: Im Mittelwert stationärer Photonenstrom plus symmetrischem Rauschanteil mit Gauß-Verteilung nach Glättung ( $S=500$ ) und Zugabe von je 4 Interpolationswerten bei Vorgabe der Stützstellenwerte nach Beispiel „GB1“ (s. Abb. IV / B3 - 4).

- a) (oben) Zeitliche Abfolge der Meßwerte (Zeitausschnitt, der dem Anfangsteil in Abb. IV / B3 - 4 entspricht) und Häufigkeitsverteilung der Gesamtheit der ca. 5000 Meßwert.Größen,
- b) (unten) Autokorrelationsfunktion (AKF).

Abfolge ist jetzt stark „verrundet“ und die Amplitude der Schwankungen um den Mittelwert sind reduziert. Die Gesamtheit der Meßwerte, im vorliegenden Fall sind es ca. 5000 Meßwerte, besitzt (nach Maßgabe der „primären Meßwerte“) die gewünschte Gauß-Verteilung, wie das Histogramm in der gleichen Abbildung auch ausweist.

Die AKF [s. Abb. IV / B3 - 5 b) ] zeigt ein Gauß-förmiges Relaxieren auf das Quadrat des Mittelwertes der Meßwerte, wobei jetzt aber ein signifikanter oszillatorischer, in der Amplitude vergleichsweise schwach relaxierender Anteil zu erkennen ist. Letzteres erklärt sich, wie oben bereits mehrfach diskutiert, daraus, daß die Meßwertabfolge trotz ihrer

statistisch unkorrelierten Generation infolge des Einfügens der Interpolationswerte eine quasi-periodische Zeitstruktur erhalten hat. Diese Zeitstruktur führt dann auch in der spektralen Amplitudendichte zu vergrößerten Werten in dem Bereich dieser Grundfrequenz. Die Spektralverteilung besitzt dabei ebenfalls etwa Gauß-Form.

Abschließend kann man zu den Modelltypen dieses Abschnitts IV / B sagen, daß mit der Einführung von Glättung und Interpolationswerten ein kontinuierlicher Übergang von rein statistischen und völlig unkorrelierten Meßwertabfolgen bis zu Zeitfunktionen konstruiert werden kann, die für kurze Zeiten korrelierte Anteile mit einer Form besitzen, die der von Aneinanderfügung und Überlagerung von Gauß-Pulks (vergl. Abschnitt IV / A 2) entsprechen. Mit der Vorgabe der Häufigkeitsverteilung in der Abfolge der „primären Meßwerte“ lassen sich dabei jedoch zusätzlich nach Wunsch bestimmte Häufigkeitsverteilungen in die Gesamtheit der Modell-Meßwerte einprägen.

## V Zusammenfassung

### A ] Ergebnisse

Dank der modernen Erweiterung des strahlungsoptischen, meßtechnischen und numerisch-mathematischen Instrumentariums hat sich die Korrelationsanalyse, und dabei insbesondere die Autokorrelationsanalyse (AKA), von Photonenströmen zu einem hochauflösenden und spezifisch aussagekräftigen Hilfsmittel der optischen Spektroskopie entwickelt. Die vorliegende Arbeit macht den Versuch eines methodischen Einstiegs in die Modellierung von Photoströmen und deren AKA, um auf diese Weise Gesichtspunkte zur Deutung entsprechender Experimente und zur Überprüfung theoretischer Einsichten zu gewinnen.

Die Autokorrelationsfunktion (AKF) 1. Ordnung des Photonenstromes, die hier betrachtet wird, ist mit  $AKF_s^{(1)}(\tau)$  bezeichnet. Die Variable  $\tau$  ist dabei die Verzögerungszeit, auf die sich der Wert der AKF bezieht.

Innerhalb der betrachteten Modellfälle führt die Variationsbreite der inhärenten Parameter, die das Ergebnis der AKA signifikant beeinflussen, zu folgenden Bestätigungen bzw. Ergebnissen:

- 1.) Bei der  $AKF_s^{(1)}(\tau)$  ist der Wert  $AKF_s^{(1)}(\tau=0)$  stets der Maximalwert.
- 2.) Rein statistisch streuende und damit absolut unkorreliert aufeinanderfolgende Meßwerte mit dem Mittelwert Null ergeben für  $AKF_s^{(1)}(\tau)$  eine Delta-Funktion bei  $\tau = 0$ , d.h. für alle Werte  $\tau > 0$  den Wert Null.
- 3.) Eine harmonische Komponente in der Zeitfunktion liefert in der  $AKF_s^{(1)}$  eine ebenfalls *harmonische Komponente* gleicher Frequenz.
- 4.) Überlagern sich in der Zeitfunktion des Photonenstromes  $i$  harmonische Funktionen additiv, so addieren sich die entsprechenden Einzel- $[AKF_s^{(1)}]_i$  in der Gesamt- $AKF_s^{(1)}$ .
- 5.) Überlagern sich unkorrelierte Schwankungen der Zeitfunktion des im Mittel stationären Photonenstromes, so erhöht sich Wert  $AKF_s^{(1)}(\tau=0)$ . Dieser Erhöhungsanteil relaxiert mit wachsender Verzögerungszeit auf Null.

- 6.) Ein im Mittel stationärer Photostrom mit einem charakteristischen Verlauf der AKF läßt sich modellieren in der Form einer statistisch variierenden zeitlichen Abfolge von „Photonen-Pulks“ einer spezifischen Form, die der erwarteten Strahlungsqualität angepaßt ist.
- 7.) Eine *exponentiell* abfallende Zeitfunktion, die die Form der Photonen-Pulks signifikant prägt, liefert einen Anteil der  $AKF_s^{(1)}$ , der anfänglich in der Abhängigkeit von der Verzögerungszeit dominiert und *exponentiell relaxiert*.  
Dieser Fall liegt bei einer Reihe von realen Strahlungsqualitäten vor, von denen zu nennen wäre:
  - a) Spektral breitbandige „weiße“ Strahlung mit oberer Grenzfrequenz
  - b) Quasi-monochromatische Strahlung mit der Spektralverteilung einer Lorentz-Linie
  - c) Gestreute Laser-Strahlung mit der Spektralverteilung einer Rayleigh-Linie
  - d) Abstrahlung exponentiell gedämpfter Wellenzüge.
- 8.) Eine *Gauß-förmige Relaxation* des dominierenden  $AKF_s^{(1)}$ -Anteils erhält man bei der Modellierung einer Gauß-förmigen Zeitfunktion des Photonenpulses. Das gilt für Einzelpulse in Wiederholung ebenso wie für Gauß-förmige Schwankungen des Mittelwertes. Der momentane Maximalwert des Photonenstromes kann dabei von Puls zu Puls statistisch variieren.  
Dieser Fall liegt bei Strahlungsqualitäten vor, wie sie real auftreten z. B. bei:
  - a) Quasi-monochromatischen Gasentladungs-Lichtquellen mit Doppler-Verbreiterung der Spektrallinie,
  - a) Laser-Strahlung mit interner Modenkopplung zur Emission und
  - b) Laser-Strahlung unter dem Einfluß von Streuung mit Ausbildung eines „Gaußschen Strahlungsfeldes“
- 9.) In der  $AKF_s^{(1)}$  des modellierten Photonenstromes tritt u. U. ein oszillatorischer, eigenständig in seiner Amplitude auf Null relaxierender Anteil auf, wenn die Photonen-Pulks quasi-periodisch, d.h. mit einer Abstandsvariation auftreten, die eine relativ enge Häufigkeitsverteilung um eine mittlere Abstandsdauer besitzen.  
– Im Experiment auftretende oszillatorische Ausläufer einer AKF können in dieser Weise gedeutet bzw. nachgebildet werden.
- 10.) Bei der Photonenstrom-Modellierung mit Hilfe statistisch variierender Puls-Abfolgen lassen sich durch ein- oder mehrmalige „Selbstüberlagerung mit Zeitversatz“ der primären Zeitfunktionen bzw. durch spezielle Puls-Zeitformen verschiedene Häufigkeitsverteilungen der modellierten „Meßwerte“ erzielen. Damit ergeben sich Aussagen zur AKF bei Vorgabe der Häufigkeitsverteilung der elektrischen Feldstärke im Strahlungsfeld, z.B. auch für das „Gaußsche Strahlungsfeld“.
- 11.) Die Modellierung des Autokorrelationsverhaltens relativ großer stationärer Photonenströme, die jedoch zeitlich auflösbare Schwankungen um den Mittelwert besitzen, gelingt zweifach:
  - a) mittels symmetrisch zum Mittelwert auftretenden Puls-artigen Abweichungen und

b) durch Überlagerung eines „geglätteten“ Rauschanteils, wobei die Glättung mittels „smoothing“ primärer Zufallswerte oder durch Einfügen von interpolierenden Werten zwischen die primären Zufallswerte realisiert wird.

Auch diese Art der Modellierung des Photonenstromes erlaubt eine gezielte Variation der Häufigkeitsverteilung der „Meßwerte“. Die erhaltenen Autokorrelationsfunktionen sind denen zuvor erhaltenen prinzipiell ähnlich.

12) Zum allgemeinen Verlauf der  $AKF_s^{(1)}(\tau)$  mit  $\tau \geq 0$ , die stets positiv ist, kann man die Feststellung treffen, daß sie in der Regel nur fünf charakteristische Funktionsanteile besitzt:

- a) eine Konstante, die insbesondere im asymptotischen Auslauf für wachsendes  $\tau$  erscheint,
- b) eine von  $\tau = 0$  aus exponentiell relaxierende Funktion oder
- c) eine von  $\tau = 0$  aus Gauß-förmig relaxierende Funktion,
- d) eine von  $\tau = 0$  aus periodisch-kosinusförmige Funktion und
- d) eine von  $\tau = 0$  aus quasi-periodisch Oszillation, die ihrerseits zu Null relaxiert und in ihrer Amplitude mit der Zahl der an der AKA beteiligten Meßwerte abnimmt.

Die relative Größe der im Einzelfall auftretenden Anteile und deren Parameter hängen von der jeweils gegebenen Zeitfunktion der in der Samplingzeit des Detektors registrierten Photonenzahl und der diesbezüglichen Häufigkeitsverteilung ab.

Die Betrachtungen der theoretisch zu erwartenden und der bei der Modellierung der Photonenströme erhaltenen Autokorrelationsfunktionen führt, was das Inversenproblem angeht, zu der Aussage: Ein zwingender, d.h. eindeutiger Rückschluß von einer erhaltenen  $AKF_s^{(1)}$  auf die primäre Zeitform des Photonenstromes ist nicht möglich. Es lassen sich aber offensichtlich doch Gesichtspunkte finden, die einen gewissen Rückschluß auf die detektierte Strahlungsqualität zulassen.

## B ] Ausblick

Der hier vorgestellte Einstieg in die Modellierung von Photoströmen im Zusammenhang mit der „optischen Autokorrelationsspektroskopie“, d.h. mit der Autokorrelationsanalyse (AKA) der von einem Photonendetektor registrierten Signal-Zeitfunktion, verleiht der Zeitdynamik des Geschehens der Meßwertaufnahme und der numerischen AKA eine gewisse Anschaulichkeit. Die Vielzahl der hier modellierten Photonenströme mit ihren funktionalen Abhängigkeiten und Parametereinflüssen führt zu einem erweiterten Verständnis der Resultate der Autokorrelationsspektroskopie und hilft dabei, die daraus gezogenen Schlüsse zu bewerten. Andererseits ist der „aufgeschlagene“ Katalog der hier modellierten Photonenströme natürlich nicht vollständig. Die vorliegenden Modellierungsbeispiele lassen aber bereits eine gewisse Gruppierung der Verhaltensmuster erkennen und erleichtern damit zumindest die ordnende Einschätzung der Ergebnisse entsprechender Experimente. Die Resultate der AKA bleiben aber, da sie sich aus einem im Prinzip „integralen Verfahren“

ergeben, immer mehrdeutig, wenn man eine „Inversion“, d.h. eine Rückwärtsbestimmung der exakten Zeitfunktion der Eingangsgröße, versucht.

Es wäre interessant, wenn man auch von Seiten des Experimentes her einen „Katalog“ von Photonenströmen mit ihren zeitlichen Meßwertabfolgen und deren Autokorrelationsfunktionen zur Verfügung hätte, um die Kenntnis der Korrespondenz von Experiment und Modell auf eine erweiterte Basis zu stellen. Dabei sollten experimentell einerseits die verschiedensten Lichtquellen, Transmission- sowie Reflexionsfilter, Streumediten und Interferenzanordnungen von Licht diesbezüglich vergleichend untersucht werden und andererseits die unterschiedlichsten meßtechnischen Gerätschaften zur Detektion der Photonenströme mit entsprechend hoher zeitlicher Auflösung Verwendung finden. Die moderne Entwicklung von thermischen Strahlern, Gasentladungslampen, Lumineszenz-dioden und Lasern, von Materialien zur Lichtführung (im weitesten Sinne), von Mischmedien und diagnostischen Präparaten, von Lichtverstärkern und Photonenzählern, von schnellen Computern und großen Datenspeichern sollte es erleichtern, diesen Wunsch zu erfüllen.

### Literatur zur Photonenstatistik

#### A ] Artikel

- [A1] KLAUS PFEILSTICKER & OLIVER FUNK: Irrwege des Sonnenlichts, Physik i. u. Zeit, vol. 31 (2000, Heft 4), p. 152 - 158
- [A2] MICHAEL HENDRIX & ALFRED LEIPERTZ: Photonenkorrelationsspektroskopie – Hochauflösende optische Spektroskopie, Physik i. u. Zeit, vol. 15 (1984, Nr.3), p. 68-75
- [A3] A. J. F. SIEGERT: MIT Radiation Laboratory Report No. 465 (1943)
- [A4] L. MANDEL: Prog. Opt. vol. 2 (1963), p. 181
- [A5] C. H. REINSCH: Smoothing by Spline Functions, Num. Math., vol. 10 (1967), p. 177-183
- [A6] H. WALTHER: Atome im nichtklassischen Licht, Phys. Blätter, vol. 47 (1991, Nr.1 ), p. 38-42
- [A7] LISA B. ABERLE, PETER HÜLSTEDE, SIMONE WIEGAND, WOLFFRAM SCHÖER, & WILFRIED STAUDE: Effective suppression of multiply scattered light in static and dynamic light scattering, Applied Optics, vol. 37 (1998, 20. Sept., No.27), p. 6511-6524
- [A8] JAN BONEß & HORST-GÜNTER RUBAHN: Geblitzte Oberflächen, Physik i. u. Zeit, vol. 31 (2000, Nr. 3), p. 121-128
- [A9] BERND WILHELMI: Very Short Light Pulses for Applikation in Spectroscopy – some Results and Trends, p. 9 - 32 in: SOS - 84 Proc. Third Symposium Optical Spectroscopy, held in Reinhardtsbrunn, 26-28 Sept.1984 (Editors: Dieter Faßler, Karl-Heinz Feller, Bernd Wilhelmi); G.Teubner-Verlag, Leipzig, 1985, 1. Auflage; Teubner-Texte zur Physik, Band4; VLN 394-375/70/85 - LSV 1165

- [A10] a) W. MARTIENSEN: Kohärentes Licht, Seite 231-253 und Berichtigung Seite 3, in: K. Hecht (Herausgeber im Auftrag der Deutschen Physikalischen Ges.), Plenarvorträge der Physikertagung Düsseldorf 1964, als Manuskript gedruckt.  
 b) W. MARTIENSEN & E. SPILLER: Coherence and Fluctuations in Light Beams, Amer. J. Phys., vol. 32 (1964), p. 919-926
- [A11] Erwin Schrödinger führte 1935 den Begriff der „Verschränkung“ quantenmechanischer Zustände ein. Bei z. B. zwei Photonen bedeutet ihre Verschränkung, daß ihr Polarisationszustand in einer *zwangsläufigen Relation* steht, etwa aufgrund eines gemeinsamen Emissionsprozesses. Es bleibt aber dabei statistisch zufällig, d. h. undefiniert, welcher der möglichen Polarisationszustände sich bei der Emission des Photonenpaares jeweils ergibt. – Zu weiterer Information und als Einstieg und Hinweis auf Anwendungen kann dienen: [2], [21] und  
 a) ANTON ZEILINGER: Quantenexperimente zwischen Photon und Fulleren, Physik i. u. Zeit, vol. 31 (2000, Heft 5), p. 199-202  
 b) W.P. SCHLEICH: Vom Ätherwind zu neuem Licht, Phys. Bl., vol. 47 (1991, Nr. 7), p. 595-601
- [A12] Die für Photonen aus der Heisenbergschen Unschärferelation resultierende Ungenauigkeit für das Produkt aus Photonenenergie und Zeit ist im Wellenbild des Lichtes gleichermaßen auf die Amplitude und die Phase verteilt. Unter Ausnutzung der optischen Nichtlinearität gewisser Materialien läßt sich jedoch durch <Quetschen> eine Unsymmetrie erreichen, so daß eine der Größen zu Ungunsten der anderen eine höhere Genauigkeit erreicht. – Zur Information über diesen nichtklassischen Zustand des Lichtes kann dienen: [2], [A11b] und  
 a) H. PAUL: <Squeezed states> - nicht klassische Zustände des Strahlungsfeldes, Laser und Optoelektronik, Nr. 1 (1987), p. 45  
 b) MONIKA MARTE: Licht an der Quantengrenze – kohärente und <gequetschte> Zustände, Physik i. u. Zeit, vol. 26 (1995, Heft 4), p. 162-168

### B ] Bücher

- [1] OLEG V. ANGELSKY: Use of Optical Correlation Techniques for Characterizing Scattering Objects and Media; SPIE Vol. PM 71, 2000; ISBN 0-8294-3490-6
- [2] a) JOSEPH W. GOODMAN: Statistical Optics, J. Wiley and Sons, New York, 1985  
 b) RODNEY LOUDON: The Quantum Theory of Light, Oxford Univ. Press, Oxford; Second Edition 1983; ISBN 0-19-851155-8  
 c) L. MANDEL & E. WOLF: Optical Coherence and Quantum Optics, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1995; ISBN 0-52141711-2
- [3] a) E. R. PIKE & E. JAKEMAN: Photonstatistics and Photo-correlation, Seite 1 - 68 in: D. W. Goodwin (Editor), Advances in Quantum Electronics, vol. 2, 1974, Academic Press, London

- b) E. R. PIKE & J. B. ABBISS (Editors): Light Scattering and Photon Correlation Spectroscopy, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht / NL, 1997; ISBN 0-7923-4736-6
- c) E. R. PIKE & SARBEN SARKAR (Editors): Frontiers in Quantum Optics, Adam Hilger, Malvers Physics Series, 1986; ISBN 0-85274-677-X
- [4] B. CHU: Laser Light Scattering, Academic Press, New York, 1974
- [5] B. J. BERNE & R. PECORA: Dynamic Light Scattering, John Wiley & Sons, inc., Chichester 1976
- [6] FRANZ RUDOLF KEßLER: Spektrometrie und Spektralradiometrie, p. 3-17 in: G. Vieth und H. Kaase (Herausgeb.), Spektralradiometrie: Methodik, Meßtechnik, Anwendung, 69. PTB Seminar 21./22.10.1986; PTB-Bericht Nr. 24 „Optik“, Braunschweig, Okt. 1986 ISSN 0341-6712 / ISBN-3-88314-662-5
- [7] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, & B. P. FLANNERY: Numerical Recipes in Fortran - The Art of Scientific Computing; Cambridge University Press, Cambridge, 1992 - 2nd Edition; ISBN 0 521 43064 X
- [8] E. MEYER & D. GUICKING: Schwingungslehre, Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1974
- [9] T. H. NAYLOR, D. S. BALINTFY & K. CHU, Computer Simulation Techniques, Wiley, 1966
- [10] R. H. KINGSTEN: Detection of Optical and Infrared Radiation, Springer-Verlag, 1978, ISBN 3-540-08617-X
- [11] RICHARD D. HUDSON, JR. & JACQUELINE WORDSWORTH HUDSON (Editors): Infrared Detectors, Dowden Hutchinson & Ross, Inc., Stroudsburg, Pennsylvania; Distributed by Halsted Press, a Division of John Wiley & Sons, Inc. 1975, ISBN 0-470-41837-0
- [12] H. BITTEL & L. STORM: Rauschen – Eine Einführung zum Verständnis elektrischer Schwankungserscheinungen, Springer - Verlag, Berlin, 1971; ISBN 3-540-05055-8
- [13] WALTER KERTZ: Statistik geophysikalischer Beobachtungsreihen, 2. , verbesserte Auflage, Braunschweig, 1978
- [14] a) ARILD LACROIX: Digitale Filter – Eine Einführung in zeitdiskrete Signale und Systeme, Verlag R. Oldenbourg, München, 2. Auflage 1985  
b) HELMUT KIPPHAN: Korrelation gefilterter Poissonscher Pulsfolgen und ihre meßtechnische Anwendung, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1983; ISSN 0341-1672  
c) U. TIETZE & CH. SCHENK: Halbleiter-Schaltungstechnik, Springer-Verlag, Berlin, 5. Auflage, 1980, Kapitel 22: Digitale Filter, Seite 594-615, [ 11. Auflage, 1999, mit CD-ROM; ISBN 3540194754 ]
- [15] WILHELM MACKE: Wellen – Ein Lehrbuch der theoretischen Physik; Akad. Verlagsges. Geest & Portig KG, Leipzig, 1958
- [16] K. L. CHUNG: Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse, Springer-Verlag Berlin, 1978



- [17] F. REIF: Physikalische Statistik und Physik der Wärme, Verlag Walter de Gruyter, Berlin, 1976
- [18] L. BERGMANN & CL. SCHAEFER: Experimentalphysik, Band III : „Optik“, Verlag Walter de Gruyter, Berlin, 1987, 8. Auflage
- [19] H. HAKEN & H. C. WOLF: Atom- und Quantenphysik, Springer-Verlag, Berlin, 1980
- [20] ABRAMOWITZ & STEGUN: Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards / USA, 1964
- [21] D. BOUWMEESTER, A. EKERT & A. ZEILINGER (Editors): The Physics of Quantum Information, Springer-Verlag, Berlin, 2000

### Anhang AH 1 : Programmausschnitt zu Abschnitt IV / B 2 :

Berechnung der Modell-Meßwerte für den Photonenstrom  
bestehend aus Photonenpuls mit Gauß-Zeitform bei statistischer Parametervariation  
Programmiersprache: HT-BASIC

```

10 ! File: AKSP12GT
20 ! — Autokorrelationsspektroskopie —
30 ! Berechnung der AKF 1. Ordnung für den detektierten Strahlungsfluß
40 ! Sampling-Zeit  $\delta t = 1$  Schleifendurchlauf
50 ! Zeitfunktion der Meßwerte: gleichhäufige positive / negative Abweichungen
60 ! in Gauß-Form(GF) vom Mittelwert YF
70 !
.....
.....
.....
110 ! — Berechnung der Photonenstrom-Meßwerte in Abfolge —
120 N4=0
130 FOR N=1 TO N2 ! —————A
140 Zuf = RND ! Zuf=Zufallszahl: 0<Zuf<1
150 Vz=1 ! Vorzeichen für Zuf>=.5
160 IF Zuf<.5 THEN Vz=-1
170 R=Xg1 + (Xg2-Xg1) * RND ! R=Relaxparam. d. GF
180 Ms=Fc*(INT(2+R) + P*INT(10*RND))
190 FOR Q=-Ms TO Ms ! —————B
200 N4=N4+1
210 Ma(N4) = YF+Vz*Yo*Zuf*EXP(-(Q/R)^2) ! Meßwert in Datenmatrix
220 Ymw=Ymw+Ma(N4) ! Summe aller bisherigen Meßwerte
230 NEXT Q ! —————B
240 NEXT N ! —————A
250 ! N4 Meßwerte liegen in der Matrix Ma(*) vor
.....
.....
END

```

Bedeutung: der Konstanten:

$P \geq 0$  ganzzahliger Param. für die „Nullwert“-Verlängerung der GF an Anfang u. Ende

$F_c \geq 2$  ganzzahliger Param. für die Meßwertzahl pro GF-Pulk

$Y_o = \text{Max-Wert d. Schwankung für (Zuf=1)}$

$X_{g1}$  und  $X_{g2}$  = Grenzwertparameter für R

YF=stationärer Mittelwert des Photonenstromes

$N_2$  = Zahl der GF-Pulks

$N_4$ =Zählvariable für die Gesamtzahl der berechneten Meßwerte

Bemerkungen:

- Von Pulk zu Pulk variieren der Max-Wert der Schwankung nach Betrag und Vorzeichen, der Relaxationsparameter R der Gauß-Funktion (GF) und mit der Zahl der Meßwerte darin auch seine zeitliche Länge mit unabhängigen Zufallszahlen RND.
- Es ist  $X_{g1} < R < X_{g2}$
- Jeder GF-Pulk umfaßt  $(2 \cdot M_s + 1)$  Meßwerte
- $Y_{mw}/N_4$  ist der Mittelwert der Größe aller Meßwerte.

## Anhang AH2 :

### Näherungsdarstellung der Gauß-Verteilung mittels der Fermi-Verteilung

Um in einem Rechenprogramm eine Zufallsvariable mit einer bestimmten Funktion der Wahrscheinlichkeitsdichte [mit definierten Parametern] zu erhalten, wendet man üblicherweise die Methode der „Inversion“ an: Man erzeugt dabei mit dem eingebauten Zufallsgenerator der Programmier-Software Zufallszahlen Z, die im Intervall  $0 < Z < 1$  „gleichverteilt“ sind. Mit Hilfe der Umkehrfunktion des Integrals der gesuchten Verteilungsfunktion liefern dann diese gleichverteilten Zufallszahlen Z gesuchte Zufallszahlen „X“ mit der gewünschten neuen Verteilungsdichtefunktion. Mit der statistischen Abfolge der ersteren erhält man so eine statistische Abfolge der letzteren.

Die Erzeugung von Gauß-verteilten Zufallszahlen auf diese Weise stößt jedoch insofern auf Schwierigkeiten, als die Gaußsche Normalverteilung nicht integrierbar ist.

Das Gaußsche Fehlerintegral ist jedoch zahlenmäßig in tabellierter Form mit relativ hoher Genauigkeit zugänglich. Mit Hilfe der entsprechenden Matrix-Form der Wertepaare, die z.B. im Speicher abgelegt ist, ließe sich mittels einer programmierten „Suchfunktion“ und Interpolation zu dem gegebenen Wert Z auch der zugehörige Wert X finden. – Diese Art der Integration und Inversion ist jedoch „unbequem“ bzw. in der Programmierung und im Zeitablauf aufwendig.

Das gleiche gilt bei analoger Ausnutzung der Tatsache, daß das Gaußsche Fehlerintegral in einem hinreichend ausgedehnten Intervall näherungsweise durch eine Potenzfunktion (s. z.B. [20]) darstellbar ist.

Wenn nicht besonders hohe Genauigkeiten gefordert sind, vielmehr ein mehr grundsätzliches Verhalten studiert werden soll, bietet es sich an, die Gaußsche Normalverteilung durch die Ableitung der Fermi-Verteilung  $F(X)$  mit dem Wertebereich  $0 < F(X) < 1$  zu ersetzen:

Die „Fermi-Verteilung“ in der Form ( für die Abszissen-Variable wird dabei die Bezeichnung „X“ wie oben beibehalten)

$$F(X) = 1 / [\exp\{ -(X-XF)/RF \} + 1 ] \quad (*) \quad (\text{Gl. AH2 / 1})$$

ist eine entsprechend sigmoid verlaufende Stufenfunktion, die vom Wert Null zum Wert 1 mit der größten Steigung bei  $X=XF$  mit dem Wert  $F(XF)=0.5$  überleitet.

Für die Ableitung  $\partial F(X) / \partial X$  ergibt sich eine Quasi-Gauß-Verteilung, denn es gilt:

$$\partial F(X) / \partial X = (1/RF) * \exp\{ -(X-XF)/RF \} / [\exp\{ -(X-XF)/RF \} + 1 ]^2 \quad (\text{Gl. AH2 / 2})$$

Auf diese Weise ist also eine entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu gewinnen, wenn mittels der Umkehrfunktion der Funktion  $F(X)$  für den Zufallswert  $Z$  der zugehörige Wert  $X$  berechnet wird. Diese Umkehrfunktion von (Gl. AH2 / 1) lautet:

$$X = RF * \{ \ln[(1/Z) - 1] \} + XF \quad (\text{Gl. AH2 / 3})$$

Mit Hilfe einer zusätzlichen multiplikativen Konstanten  $C = (4*RF)$  kann gegebenenfalls diese „Gauß-ähnliche“ Dichtefunktion im Maximum bei  $X=XF$  auch noch auf den Wert 1 normiert werden.

Die Abb. AH2-1 zeigt die korrekte Gauß-Verteilung und die aus der „Fermi-Verteilung“ abgeleitete Quasi-Gauß-Verteilung im Vergleich, wobei beide Kurven auf den Maximalwert

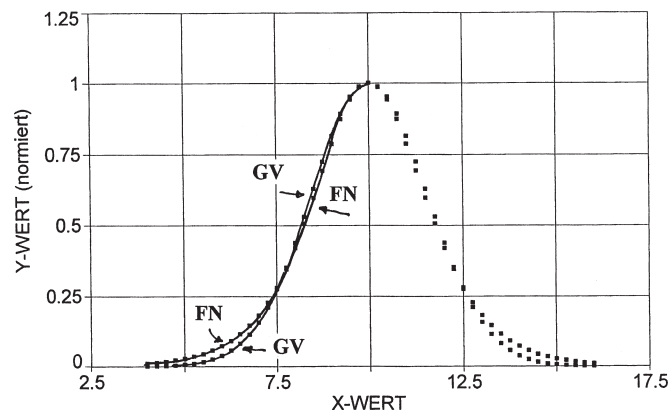


Abb. AH2-1 Graphischer Vergleich zwischen der im Maximum bei  $X=10$  auf den Wert Eins normierten Gauß-Verteilung (GV) und ihrer mittels der Fermi-Verteilung gewonnenen Näherungsdarstellung (FN). Zur Erläuterung siehe Text in AH2.

\* In der üblichen Form der „Fermi-Funktion“ für die Wahrscheinlichkeit der temperaturabhängigen Besetzung von elektronischen Energieniveaus im Festkörper besitzt der Exponent das umgekehrte Vorzeichen, die Stufe geht also vom Wert  $F(X=0) \approx 1$  mit wachsendem  $X$  asymptotisch auf den Wert Null hinunter. Dieser Unterschied ist aber hier wegen der Symmetrie der erhaltenen „Quasi-Gauß-Verteilung“ um den Wert  $X=XF$  ohne Bedeutung.

Eins bei  $XF=10$  normiert sind. Die Standardabweichung „STA“ der Funktionswerte der Quasi-Gauß-Verteilung gegenüber den Werten der exakten Gauß-Verteilung beträgt bei den gewählten, in der Abbildung aufgeführten Anpassungsparametern im Intervall  $X=4$  bis  $X=16$  nur  $STA = 0.023$ , also nur 2,3 % des Maximalwertes.

– Es erscheint also zulässig, im Rahmen der vorliegenden Modellierung von Photonenströmen in erster Näherung eine Gauß-Verteilung der „Meßwerte“ auf diese analytische Weise schnell und ohne großen Programmaufwand zu realisieren.

Ergänzend ist auszuführen, daß man eine statistische Abfolge Gauß-verteilter Zufallszahlen auch direkt nach der „polaren Methode“ [ A13 ] erhalten kann, dabei ist jedoch jeweils ein Paar unabhängiger, gleichverteilter Zufallszahlen zu verwenden.